# Ramsey-Theorie (weiter)

- $R_2(p,p) \leq 2^{2p-2}$

- **Satz:** $R_2(p,p) \geq 2^{p/2}$ für $p \geq 3$.

**Beweis:** Betrachte $K_n$

- Es ex. $2^{\binom{n}{2}}$ Kantenfärbungen mit 2 Farben
- Sei $K_p \leq K_n$ fest
- Es ex. $2^{\binom{n}{2} - \binom{p}{2} + 1}$ Färbungen, bei denen $K_p$ einfarbig ist.
- Es ex. höchstens $\binom{n}{p} \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{p}{2} + 1}$ Färbungen, bei denen ein $K_p$ einfarbig ist.
- Sei $n < 2^{p/2}$. Dann:

$$\frac{\binom{n}{p} \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{p}{2} + 1}}{2^{\binom{n}{2}}} = \frac{\binom{n}{p}}{2^{\binom{p}{2}+1}} \leq \frac{\frac{n^p}{p!}}{2^{\binom{p}{2}-1}}$$

$$\leq \frac{\left(2^{p/2}\right)^p \cdot 2^{-\binom{p}{2}+1}}{p!} = \frac{2^{\frac{p^2}{2}-\frac{p^2}{2}+\frac{p}{2}+1}}{p!}$$

$$= \frac{2^{\frac{p}{2}+1}}{p!} < 1$$

#

<u>Aufgabe:</u> Berechnen Sie $R_2(3,4)$.

$[R_2(3,4) \leq \binom{5}{2} = 10.]$

# Extremale Kombinatorik

- <u>Def.:</u> – <u>Halbordnung</u>
  - irreflexiv, transitiv (entspricht „<")
  - reflexiv, antisymmetrisch, transitiv (entspricht „≤")

  $[R \subseteq P \times P$ antisymmetrisch $\Leftrightarrow [(a,b),(b,a) \in R \Rightarrow a=b]]$

  – <u>lineare</u> (auch <u>totale</u>) Ordnung

  $\Leftrightarrow$ Halbordnung $(P, \leq)$ mit $\forall x,y \in P: x \leq y \vee y \leq x$

  (Analogon zu vollständigen Graphen)

- **Kette** = linear geordnete Teilmenge

(Analogon zu Clique)

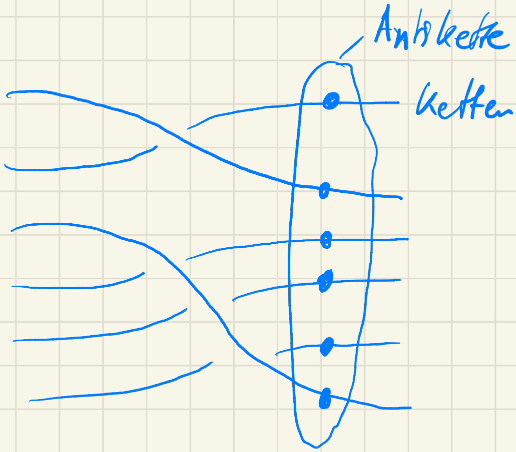
- Antikette = Teilmenge von paarweise unvergleichbaren Elementen

(Analogon zu unabh. Menge)

• **Satz** (Dilworth 1950)

Sei $(P, \leq)$ endl. Halbordnung. Dann ist die minimale Anzahl $m$ an disjunkten Ketten, welche $P$ überdecken, gleich der maximalen Größe $M$ einer Antikette.

**Bild**:



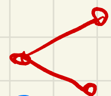

**Beweis**: $m \geq M$ ist klar, da El. aus Antikette in versch. Kette liegen.

Mit Induktion nach $|P|$ zeigen wir, dass Zerl. in $m$ Ketten und Antikette der Größe $m$ ex. für ein $m \in \mathbb{N}$.

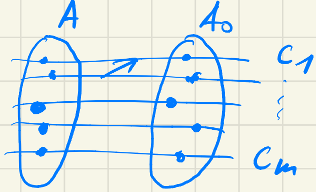
$P = \emptyset$: ✓

$P \neq \emptyset$: Sei $a \in P$ minimal. Nach IV kann $P' = P \setminus \{a\}$ mit disj. Ketten $C_1, \ldots, C_m$ überdeckt werden, und es ex. Antikette $A_0 \subseteq P'$ mit $|A_0| = m$

- $\forall i: A_0 \cap C_i \neq \emptyset$



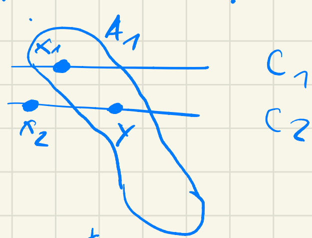
- Sei $x_i \in C_i$ das kleinste Element von $C_i$, welches zu einer Antikette der Größe $m$ gehört.




- $A := \{x_1, \ldots, x_m\}$
- <u>Beh.:</u> $A$ ist Antikette

Beweis: Sei $A_1$ Antikette mit $|A_1| = m$ und $x_1 \in A_1$.

Sei $y \in A_1 \cap C_2$.




Dann $x_2 \leq y$.

Deshalb $x_1 \not\leq x_2$ (da $x_1 \not\leq y$)

Analog $x_i \not\leq x_j$ für alle $i \in J$.

$\Rightarrow$ $A$ ist Antikette.

zurück zu $P$:

1. Fall: $\exists i$ mit $a \leq x_i$

$K := \{a\} \cup \{z \in C_i \mid x_i \leq z\}$

Nach Wahl von $x_i$ besitzt $P \setminus K$ keine Antikette der Größe $m$. Mit Induktion kann $P \setminus K$ mit $m-1$ disj. Ketten überdeckt werden. Hinzunahme von $K$ liefert Überdeckung mit $m$ disj. Ketten.

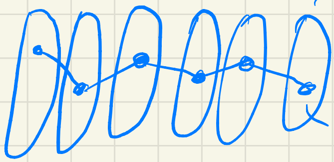
2. Fall: $\nexists i$ mit $a \leq x_i$. Da $A \cup \{a\}$ Antikette der Größe $m+1$ und $m+1$ Ketten $\{a\}, C_1, \dots, C_m$. #

- Duales Resultat zu Satz von Dilworth:

- Satz (Mirsky 1971):

Sei $(P, \leq)$ endl. Halbordnung. Dann ist die minimale Anzahl von disjunkte Antiketten, welche $P$ überdecken, gleich der maximalen Größe einer Kette.

Bild:




Beweis: $P = \emptyset$: ✓

Sei $A$ die Menge aller minimalen Elemente.

$P \setminus A$ zerlegt sich in Antikette $A_2, \dots, A_m$ mit Kette $x_2, \dots, x_m$. (Jeder Weg max. Länge hat ein El. in $A$.)

$\exists x_1 \in A$ mit $x_1 \leq x_2$ (da $x_2$ nicht minimal)

$\Longrightarrow$ Antikette $A_1, A_2, \dots, A_m$,

Kette $x_1, x_2, \dots, x_m$ #

Korollar (aus jedem der vorigen beiden Sätze):

$|P| = n^2+1 \Longrightarrow \exists$ Kette der Größe $n+1$ oder Antikette der Größe $n+1$.

Typische Halbordnung: Potenzmenge $2^X$ mit $A \leq B :\Leftrightarrow A \subseteq B$.