Graphentheorie 14.01.2021

- Def.: k-Teilmenge = Teilmenge mit k Elementen

- Satz: Sei $\mathcal{A}$ eine Antikette von Teilmengen von $\{1,\dots,n\}$. Dann gilt

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1.$$

Beweis: • Für jede Teilmenge $A \subseteq \{1,\dots,n\}$ gibt es genau $|A|!\,(n-|A|)!$ maximale Ketten, welche A enthalten

[erst alle El. aus A in bel. Reihenfolge: $|A|!$, dann die übrigen El. in bel. Reihenfolge: $(n-|A|)!$]

- Es gibt $n!$ maximale Ketten.
- Für $A, B \in \mathcal{A}$ sind die in $|A|!\,(n-|A|)!$ und die in $|B|!\,(n-|B|)!$ gezählten Ketten disjunkt, d.h.

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!\,(n-|A|)! \leq n! \qquad \#$$

- **Satz** (Sperner 1928)

  Sei $\mathcal{A}$ eine Antikette von $\{1, \dots, n\}$.

  Dann gilt $\quad |\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

  Beweis: Folgt aus vorigem Satz, da $\binom{n}{k}$

  für $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ maximal ist. #

- Gleichheit für $\mathcal{A} = \left\{ \binom{\{1, \dots, n\}}{\lfloor n/2 \rfloor} \right\}$.

  oder $\mathcal{A} = \left\{ \binom{\{1, \dots, n\}}{\lceil n/2 \rceil} \right\}$

- **Satz** (Bollobás 1973)

  Sei $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ eine Antikette von

  m versch. Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ mit $\forall i, j$:

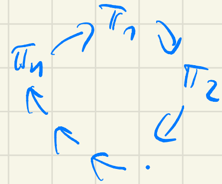
  - $|A_i| \leq \frac{n}{2}$
  - $A_i \cap A_j \neq \emptyset$

  Dann gilt
  $$\sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n-1}{|A|-1}^{-1} \leq 1 .$$

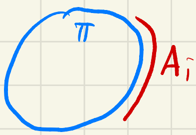
- **Beweis:**

  - Wir ordnen jede Permutation π von $\{1, \dots, n\}$ auf einem Kreis an

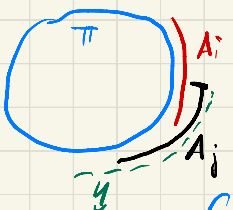
$(\pi_1, \dots, \pi_n) \longrightarrow$



- $A_i \in \pi \;:\Longleftrightarrow$ falls die Elemente aus A_i hintereinander auf dem Kreis stehen



- $A_i \in \pi \Longrightarrow$ es ex. höchstens $|A_i|$-viele $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $A_j \in \pi$ (sonst hätten A_i und A_j leeren Schnitt)



- $$f(\pi, i) := \begin{cases} \frac{1}{|A_i|} & \text{falls } A_i \in \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Nun gilt $$\sum_{\pi \in S_n} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} f(\pi, i)}_{\leq 1} \leq n!$$

- Für festes A_i gibt es

zykl. Vertauschungen

$$n \cdot |A_i|! \, (n - |A_i|)!$$

viele Permutationen π mit $A_i \in \pi$.

- $n! \geq \sum_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^{m} f(\pi, i) \overset{\text{Umsortieren}}{=} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\pi \in S_n} f(\pi, i)$.

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|A_i|} \cdot n \cdot |A_i|! \, (n - |A_i|)! \qquad \#$$

- **Satz** (Erdös, Ko, Rado 1961)

Sei $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ eine Familie von versch. k-Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ mit $k \leq \frac{n}{2}$ und $A_i \cap A_j \neq \emptyset \ \forall i, j$.

Dann gilt: $m \leq \binom{n-1}{k-1}$.

- **Beweis:** folgt aus obigem Satz. #

- Gleichheit gilt für $\mathcal{A} = \{A \cup \{n\} \mid A \in \mathcal{A}'\}$ und $\mathcal{A}' = \binom{\{1, \dots, n-1\}}{k-1}$.

- **Satz** (Erdős und Szekeres 1935)

In einer Folge von n^2+1 Elementen einer total geordneten Menge gibt es immer eine monotone Teilfolge mit $n+1$ Elementen (steigend oder fallend).

Beweis: Folge: $x_0, \dots, x_{n^2}$

- Ang. es ex. keine monoton steigende Folge der Länge $n+1$
- Für $i \in \{0, \dots, n^2\}$ sei r_i die Länge einer längsten monoton steigenden Teilfolge, die bei x_i beginnt.
- $1 \leq r_i \leq n$
- Schubfachschluss: $\exists\, i_0 < \dots < i_n$ mit $r_{i_j} = r_{i_{j+1}}$
- $x_{i_j} \geq x_{i_{j+1}}$ sonst könnte wir x_{i_j} zur Folge bei $x_{i_{j+1}}$ hinzunehmen.

$\Longrightarrow x_{i_0} > x_{i_1} > \dots > x_{i_n}$ #