Intermezzo: Der Satz von Grötzsch

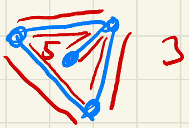
- **Satz** (Grötzsch 1959)

  Dreiecksfreie planare Graphen sind 3-färbbar.

- Beweis nach Dvořák, Kawarabayashi, Thomas 2009.

Aufwärmübung

- **Lemma 1:** In jedem planaren Graphen G mit $\delta(G) \geq 3$ gibt es eine Facette der Länge ≤ 5.



- **Beweis:** OE G zsh.
  - Charging:

    Gewicht pro Knoten x: $4 - d_x$

    Gewicht pro Facette g: $4 - l_g$

  - Gesamtgewicht:

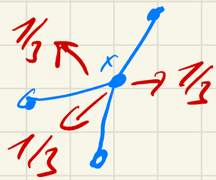
$$\sum_{x \in V} (4 - d_x) + \sum_{g \in F} (4 - l_g) = 4n - 2e + 4f - 2e$$

Eulerformel

$$= 8 > 0$$

• Discharging:

Jeder Knoten x mit $d_x = 3$ gibt $1/3$ seines Gewichts an jede angrenzende Facette weiter (bei mehrfach angrenzenden Facetten wird auch mehrfach $1/3$ weitergegeben)



• Alle Knoten haben Gewicht ≤ 0

$\Rightarrow \exists$ Facette g mit pos. Gewicht:

$$0 < \text{Gewicht}(g) \leq 4 - l_g + \frac{l_g}{3} = 4 - \frac{2 l_g}{3} \Rightarrow l_g < 6$$

$\Rightarrow l_g \leq 5$. #

• **Lemma 2:** Sei G zsh., planar, $\delta(G) \geq 2$. Sei $C \neq G$ der Rand der äußeren Facette g_0, $l_{g_0} \leq 6$, $d_x \geq 3$ für alle $x \notin V(C)$. Dann besitzt G eine Facette $g \neq g_0$ mit $l_g \leq 4$ oder $l_g = 5$ und Rand von g ist $(x_1, \dots, x_5)$ mit $\forall\, 1 \leq i \leq 4$: $d_{x_i} = 3$ und $x_i \notin V(C)$.

- Beweis:

- Charging:

  Knoten x : $12-3d_x$

  äußere Facette g_0 : $-11-3\ell_{g_0}$

  Facette $g \neq g_0$: $12-3\ell_g$

- Gesamtgewicht:

$$\sum_{x \in V}(12-3d_x) - 11 - 3\ell_{g_0} + \sum_{g \in F \setminus \{g_0\}} (12-3\ell_g)$$

$$= 12n - 6e - 11 + 12(f-1) - 6e$$

$$= \underbrace{12n - 12e + 12f}_{=24} - 23 = 1 > 0.$$

- Discharging:

Jeder Knoten $x \notin V(C)$ mit $d_x = 3$ gibt Gewicht $+1$ an jede anliegende Facette (mit Vielfachheit)

Jeder Knoten $x \in V(C)$ mit $d_x = 3$ gibt Gewicht $+3$ an die äußere Facette.

Jeder Knoten $x \in V(C)$ mit $d_x = 2$ gibt Gewicht $+5$ an die äußere Facette und $+1$ an die andere anliegende Facette.

- Jeder Knoten hat Gewicht ≤ 0.
- g_0 hat Gewicht ≤ 0: mindestens ein Knoten mit $d_x \neq 2$.

$$\text{Gewicht}(g_0) \leq -11 - 3\ell_{g_0} + \overbrace{5 \cdot (\ell_{g_0} - 1) + 3}$$

$$= -13 + 2\ell_{g_0} \overset{\ell_{g_0} \leq 6}{<} 0$$

- Es ex. Facette $g \neq g_0$ mit positiven Gewicht:

$0 < \text{Gewicht}(g) \leq 12 - 3\ell_g + \ell_g = 12 - 2\ell_g$

$\Rightarrow \ell_g \leq 5$.

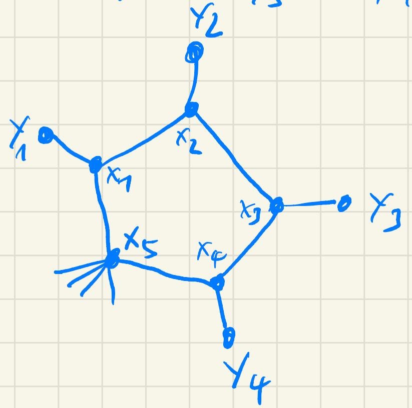
- $\ell_g \leq 4$: fertig
- $\ell_g = 5$: Startgewicht -3

$\Rightarrow g$ hat von mindestens 4 anliegenden Knoten $x \notin C$ ein Gewicht $+1$ bekommen

($x \in C$, $d_x = 2$ ist nicht möglich: 2 Knoten in $C \cap g$, die g nichts geben). #

Def.: Eine Facette der Länge 5 mit Rand $(x_1, \dots, x_5)$ ist <u>harmlos</u>, falls

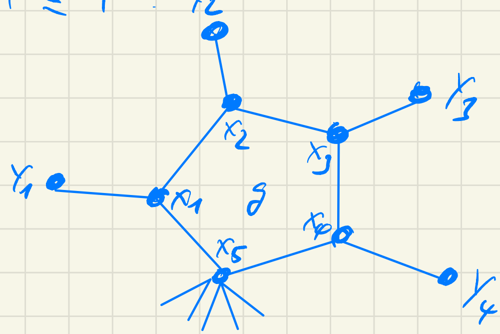
- $\forall\, 1 \leq i \leq 4$: $d_{x_i} = 3$ und x_i nicht auf äußerer Facette.
- Sei y_i $(1 \leq i \leq 4)$ verbleibender Nachbar (außerhalb von $x_1, \dots, x_5$) von x_i. Dann
  - y_i alle verschieden und nicht benachbart
  - kein Pfad x_5 ab y_2 in $G - \{x_1, \dots, x_4\}$
  - kein Pfad y_3 ab y_4 in $G - \{x_1, \dots, x_4\}$



Lemma 3: Jeder Δ-freie, planare, 2-zsh. Graph G mit $\delta(G) \geq 3$ besitzt eine Facette der Länge 4 oder der Länge 6 oder eine harmlose Facette der Länge 5.

Beweis: OE G besitzt keine Facette der Länge 4 oder 6. Nach Lemma 1 können wir nach Trafo annehmen, dass die äußere Facette die Länge 5 hat.

- Wenn G einen separierenden Kreis C der Länge ≤ 6 besitzt, dann $G' = C \cup$ Inneres von C
- Ab jetzt: äußere Facette (mit Rand C) hat Länge ≤ 6; alle inneren Knoten haben Grad ≥ 3, Randknoten haben Grad ≥ 2; keine separierenden Kreise der Länge ≤ 6; alle Facetten haben mindestens Länge 5, aber nicht Länge 6.
- Nach Lemma 2 ex. Facette g der Länge 5 mit Rand $(x_1, \dots, x_5)$, $d_{x_i} = 3$ und $x_i \notin C$ für alle $1 \le i \le 4$.



- ~~Da G 2-zsh.~~ Es, sind alle x_i verschieden und nicht benachbart (weil es keine separierende Kreise der Länge ≤ 6 gibt).

- Kein Pfad x_5 ab y_2 in $G - \{x_1, \dots, x_4\}$ (weil es keine separierenden Kreise der Länge 6 gibt)

- Kein Pfad y_3 ab y_4 in $G - \{x_1, \dots, x_4\}$ (weil es keine separierenden Kreise der Länge 6 gibt und keine Facette der Länge 6)

$\Longrightarrow$ δ ist harmlos. #