Graphentheorie 21.01.2021

- Beweis des Satzes von Grötzsch:
- Induktion nach $|V|$
- G nicht zsh.: betrachte zsh.-Komp.; OE G zsh.
- $\exists x \in V$: $G-x$ nicht zsh., Komponenten $V_1 \cup \dots \cup V_k$

  $\to$ betrachte $G_i = G[V_i \cup \{x\}]$.

  Wir können annehmen, dass x in allen G_i die selbe Farbe hat $\rightarrow$ 3-Färbung von G.

  OE G 2-zsh.
- $\exists x \in V: d_x \leq 2$: Färbe $G-x$; eine Farbe bleibt für x übrig.

  OE $\delta(G) \geq 3$.
- Facette (x_1, x_2, x_3, x_4):

  Pfad $x_1 a b x_3$ in G

  $\Rightarrow$ kein Pfad $x_2 c d x_4$ möglich

  (sonst Dreieck oder nicht plan)

  OE $x_1 a b x_3$ ex. nicht

G' entsteht aus G durch Verkleben (identifizieren) von x_1 und x_3.

G' ist dreiecksfrei.

3-Färbung von G' ergibt 3-Färbung von G (x_1, x_3 bekommen beide die Farbe des verschmolzenen Knotens)

- Facette $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$:

  Wie vorhin: $\nexists$ Pfad x_1 ab x_3 ex nicht. Verschmelze von x_1 und x_3

- harmlose Facette $(x_1, \dots, x_5)$:

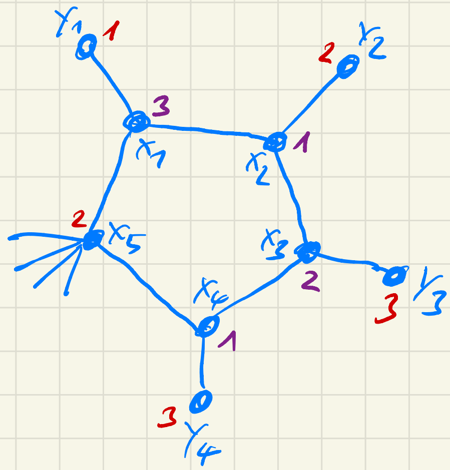
  Entferne $x_1, \dots, x_4$;

  verschmelze:

  - x_5 mit y_2 und
  - y_3 mit x_4

  $\rightsquigarrow$ Graph G'

  Färbung von G' liefert Färbung von G.



y1
1
x1
3
y2
2
x2
1
x5
2
x3
2
y3
3
x4
1
y4
3

#

Perfekte Graphen

- **Def.:** $|G|$ = # Knoten von G
- **Def.:** G ist <u>perfekt</u>

  $:\Longleftrightarrow$ für jeden induzierten UG: $H \subseteq G$

  gilt $\chi(H) = \omega(H)$

  [$H = G$ ist möglich]
- **Bsp.:** – K_n ist perfekt

  – bipartite Graphen sind perfekt

  – Cographen sind perfekt

  – C_n mit $n \geq 5$ ungerade ist nicht perfekt

  [$\chi = 3$, $\omega = 2$]

erstmals veröff. 2002

- **Satz** (Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas 2006):

  G perfekt $\Leftrightarrow$ weder G noch $\bar{G}$ enthält induzierten C_n mit $n \geq 5$ ungerade.

[„Starker Hauptsatz über perfekte Graphen"

Paper ist ~180 Seiten lang.]

• Satz (Hauptsatz über perfekte Graphen):

G perfekt $\Leftrightarrow$ $\overline{G}$ perfekt

• Wir beweisen folgende stärkere Aussage, die symm. in G und $\overline{G}$ ist.

• Satz (Lovász 1972) Originalarbeit ist etwas über 3 Seiten lang.

G perfekt $\Leftrightarrow$ $|H| \leq \omega(H) \cdot \omega(\overline{H})$ für alle induzierten UG $H \subseteq G$.

• Beweis: Erinnerung $\omega(\overline{H}) = \alpha(H)$.

„$\Rightarrow$": Sei G perfekt und $H \subseteq G$ induzierter UG.

Dann $\chi(H) = \omega(H)$. Jede der $\omega(H)$ vielen Farbklassen hat $\leq \alpha(H)$ viele Knoten

$\Rightarrow |H| \leq \omega(H) \cdot \alpha(H)$.

„$\Leftarrow$": Sei $G = (V, E)$ ein Graph, der die Bedingung auf der rechten Seite erfüllt.

• $V = \{x_1, \dots, x_n\}$

• $\omega := \omega(G)$, $\alpha := \alpha(G)$

- <u>Induktion nach n:</u> $n=1$: ✓ $n>1$:
- Ang. G ist nicht perfekt
- nach IV ist jeder echte induzierte UG perfekt
- Für alle $V \supseteq U$ unabh. gilt

$$\chi(G-U) \overset{IV}{=} \omega(G-U) = \omega \qquad (1)$$

„$\leq$" ist klar; $\chi(G-U) < \omega$ würde $\chi(G) \leq \omega$ implizieren, womit G perfekt wäre

- Sei W die Knotenmenge eines beliebigen K_ω in G und $x \in V$. Dann

$x \notin W \Rightarrow W$ trifft jede Farbklasse von $G-x$ (2)

$x \in W \Rightarrow W$ trifft genau eine Farbklasse von $G-x$ nicht (3)

- $A_0 = \{x_1, \dots, x_\alpha\} \subseteq V$ unabh. Menge der Größe α
- $A_1, \dots, A_\omega$ Farbklassen einer ω-Färbung von $G-x_1$

$A_{\omega+1}, \dots, A_{2\omega}$ —— " —— $G-x_2$

⋮

$A_{(\alpha-1)\omega+1}, \dots, A_{\alpha\omega}$ —— " —— $G-x_\alpha$

- insges. $2w+1$ viele unabh. Mengen
- Nach 1 ex. für alle $0 \leq i \leq 2w$ ein $K_w \subseteq G - A_i$ mit Knotenmenge W_i.
- Sei W die Knotenmenge eines K_w in G. Dann $\exists!\ i \in \{0, \dots, 2w\}: W \cap A_i = \emptyset$ 4

Denn: $W \cap A_0 = \emptyset \Rightarrow W \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i > 0$ (nach 2)

$W \cap A_0 \neq \emptyset \Rightarrow W \cap A_0 = \{x_i\}$ für ein i

$\Rightarrow W \cap A_j \neq \emptyset$ für alle $j \notin \{(i-1)w+1, \dots, i \cdot w\}$ nach 2

$W \cap A_j = \emptyset$ für genau ein $j \in \{(i-1)w+1, \dots, i \cdot w\}$ nach 3

- Wir definieren 3 Matrizen A, B, C über $\mathbb{R}$
  - $A = (a_{ij})$ ist $(2w+1) \times n$ -Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_j \in A_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $B=(b_{ij})$ ist $n \times (\alpha\omega+1)$ - Matrix mit

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_i \in W_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $C=(c_{ij})$ ist $(\alpha\omega+1)\times(\alpha\omega+1)$ - Matrix mit

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \neq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Es gilt $AB = C$, denn

$$\sum_k a_{ik} b_{kj} = |A_i \cap W_j| = \begin{cases} 0 & \text{für } i=j \text{ nach Konstr. der } W_i \\ 1 & \text{für } i \neq j \text{ nach } (4) \end{cases}$$

- C invertierbar $\Rightarrow$ A hat Rang $\geq \alpha\omega+1$

  $\Rightarrow n \geq \alpha\omega+1$ ↯ zu $n \leq \alpha\omega$

- Also ist G perfekt. #