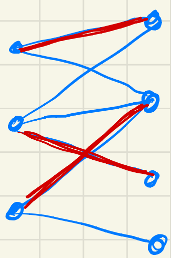
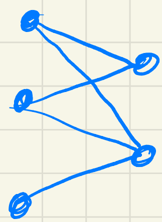
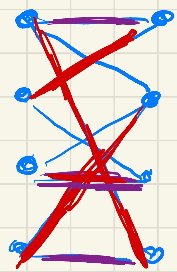
Matchings in bipartiten Graphen

- $G = (A \dot{\cup} B, E)$ mit $E \subseteq A \times B$, d.h. G bipartit
- $M \subseteq E$ ist <u>perfektes Matching</u> (für A), falls M Matching ($\forall e, f \in M : e \cap f \neq \emptyset \Rightarrow e = f$) und $\forall a \in A \; \exists e \in M : a \in e$
- Bsp.:





kein perf. Matching



Matching, aber nicht perfekt

perfektes Matching

• <u>Satz</u> (Heiratssatz, Hall 1935):

Sei $G = (A \dot\cup B, E)$ mit $E \subseteq A \times B$ bipartit. Dann

G besitzt perfektes Matching für A $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\forall S \subseteq A : |N_G(S)| \geq |S|}_{\text{„Heiratsbedingung"}}$

wobei $N_G(S) = \{y \mid \exists x \in S : xy \in E\}$

(„Nachbarn").

• <u>Beweis 1:</u>

„$\Rightarrow$" klar (Heiratsbed. gilt bereits für Matching; Hinzufügen der übrigen Kanten schadet nicht).

„$\Leftarrow$"

<u>1. Fall:</u> Für alle S mit $\emptyset \neq S \subsetneq A$ gilt $|N_G(S)| > |S|$: Wähle $\underset{\{xy\}}{\underset{\shortparallel}{e}} \in E$ beliebig.

$G' = G - \{xy\}$ erfüllt Heiratsbed.

$\xrightarrow{IV}$ perfektes Matching M' für G'

$M := M' \cup \{e\}$ perf. Matching für G.

<u>2. Fall:</u> Es ex. S mit $\emptyset \neq S \subsetneq A$ und $|N_G(S)| = |S|$.

$G_1 = G[S \cup N_G(S)]$

$G_2 = G - (S \cup N_G(S)) = (A_2 \dot\cup B_2, E_2)$

- G_1 erfüllt Heiratsbed. $\overset{IV}{\rightsquigarrow}$ perfektes Matching M_1 für G_1
- G_2 erfüllt Heiratsbed.: Sei $T \subseteq A_2$

$|N_{G_2}(T)| + \underline{|N_G(S)|} = |N_G(T \cup S)| \geq |T \cup S| = |T| + \underline{|S|}$

$\Longrightarrow |N_{G_2}(T)| \geq |T|$

$\overset{IV}{\rightsquigarrow}$ perfektes Matching M_2 für G_2

- $M := M_1 \cup M_2$ perf. Matching für G. #

- bipartite Graphen sind perfekt [$\chi = \omega$ für alle ind. UG]

- <u>Beweis 2:</u>

„$\Leftarrow$": OE $d_b \geq 1$ $\forall b \in B$

B ist eine maximale unabh. Menge.

[Sei $A' \cup B'$ unabh. mit $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$.

Dann ist auch $N(A') \cup B'$ unabh. und

nach Heiratsbed. gilt

$$|N(A')| + |B'| = |N(A') \cup B'|$$
$$\geq$$
$$|A'| + |B'|$$
$$=$$
$$|A' \cup B'|$$

- G perfekt $\Longrightarrow$ $\bar{G}$ perfekt
  $\Rightarrow \exists$ Färbung von $\bar{G}$ mit $|B|$ Farben
  $\Rightarrow \exists$ disj. Cliquenüberdeckung N in G mit $|N| = |B|$
  (d.h. jeder Knoten aus B wird genau einmal getroffen)
- Wir wählen für alle $a \in A$ eine Kante $e_a \in N$ mit $a \in e_a$ aus
- $M = \{e_a \mid a \in A\}$ ist perfektes Matching. #

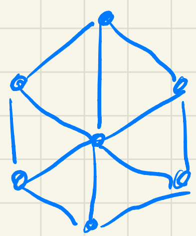
Beweis 3:

- Orientiere Kanten von A nach B.
- Kantenmenge definiert Halbordnung
- B max. unabh. Menge
- Dilworth: disjunkte Überdeckung mit |B| Pfaden (Kanten und einzelne Knoten)
- Kanten bilden perf. Matching. #

Chordale Graphen (chord = Sehne)

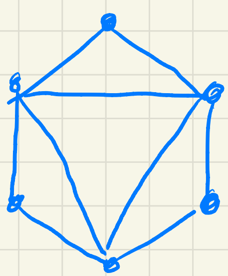
(= „triangulierte Graphen" = „Dreiecksgraphen")

- **Def.:** G **chordal** :⟺ jeder einfache Kreis der Länge ≥ 4 hat eine Sehne
  [zuerst betrachtet: Hajnal, Surányi 1958]
- **Bsp.:** - vollst. Graphen und kreisfreie Graphen sind chordal
  - ①



ist nicht chordal: äußerer Kreis hat keine Sehne

  - ②

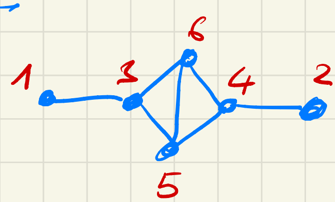


ist chordal

- **Def.:** $x \in V$ simplizial :⟺ $N(x)$ Clique

- **Def.:** Sei $V = \{x_1, \dots, x_n\}$.
$(x_1, \dots, x_n)$ **perfekte Ordnung**
$:\Leftrightarrow \forall\, 1 \le i \le n: x_i$ simplizial in $G[x_i, \dots, x_n]$

- **Bsp.:**



- **Lemma 1** (Fulkerson, Gross 1965)
G hat perf. Ordnung $\Rightarrow$ G chordal.

- **Beweis:** Sei $(x_1, \dots, x_n)$ perf. Ordnung.
$G[x_2, \dots, x_n]$ chordal nach IV.
Sei C ein einfacher Kreis der Länge ≥ 4
1. Fall: $x_1 \notin C \Rightarrow C$ Kreis in $G[x_2, \dots, x_n]$
$\Rightarrow$ C hat Sehne

2. Fall: $x_1 \in C$. Nachbarn a, b von x_1
auf C gehören zu $N(x_1)$
$N(x_1)$ Clique $\Rightarrow$ $ab \in E \Rightarrow$ C hat Sehne ab. #

• **Def.:** Seien $a, b \in V$ mit $ab \notin E$.

– $S \subseteq V \setminus \{a,b\}$ Separator (von a, b)

:⟺ $\underbrace{\text{a und b liegen in versch. Zsh.komp. von } G - S}_{\text{S trennt a und b}}$

– Separator S ist minimal

:⟺ kein $S' \subsetneq S$ trennt a und b.

• **Lemma 2** [Dirac 1961]:

G chordal ⟹ jeder min. Separator ist eine Clique.