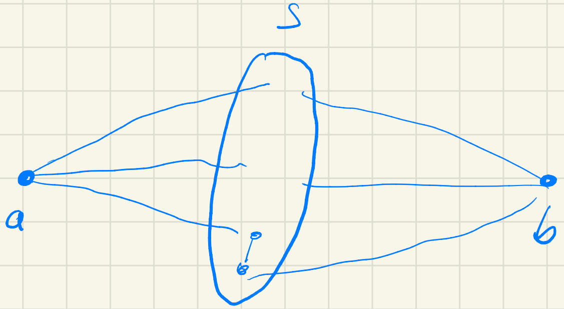
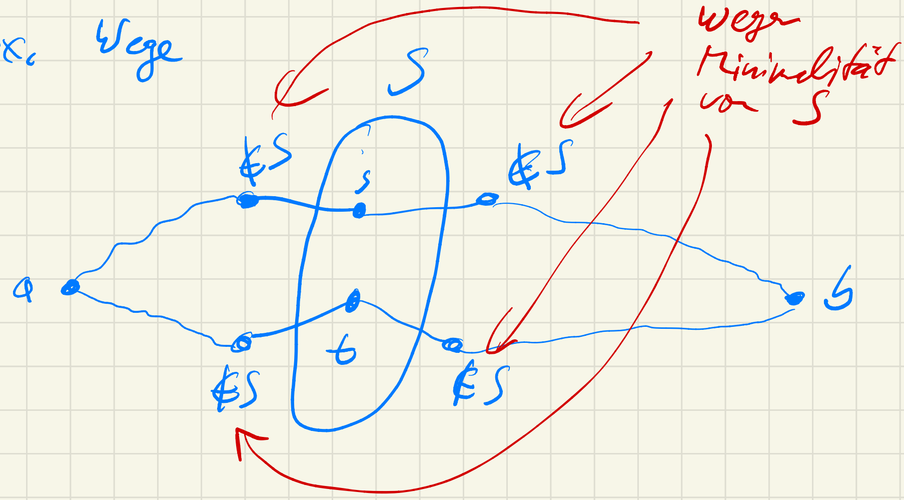
# Graphentheorie 3.02.2021

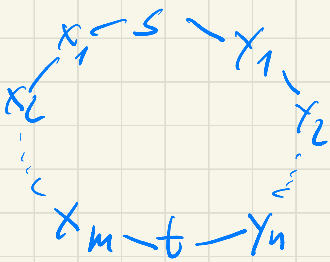



## Beweis (Lemma 2):

- Seien $a, b \in V$, $ab \notin E$, $S$ min. Sep. von $a, b$.
- Seien $s, t \in S$ mit $s \neq t$. Z.z. $st \in E$:
- Es ex. Wege



- Wähle $m,n$ min., sodass




$x_1, \dots, x_m \in$ Zsh.komp. von $a$ in $G-S$

$y_1, \dots, y_n \in$ Zsh.komp. von $b$ in $G-S$

- einfacher Kreis der Länge $\geq 4$
- $-$ $S$ Separator $\Rightarrow$ $x_i y_j \notin E$

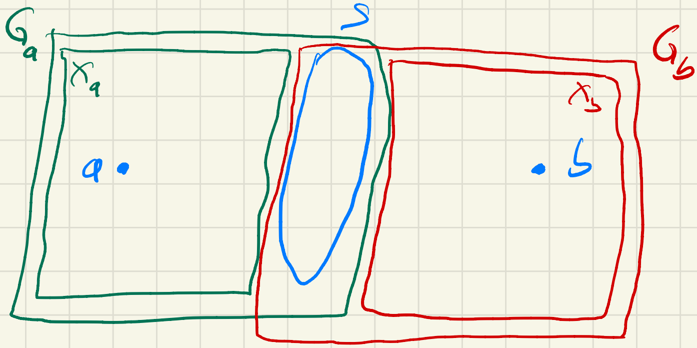
  $-$ $m,n$ min. $\Rightarrow$ $x_i x_j \notin E$,
  $y_i y_j \notin E$,
  $s x_i \notin E$ für $i > 1$,
  $s y_i \notin E$ für $i > 1$,
  $t x_i \notin E$ für $i < m$,
  $t y_i \notin E$ für $i < n$
- $G$ chordal $\Rightarrow$ es ex. Sehne
- $st$ ist einzige mögliche Sehne, d.h. $st \in E$. #

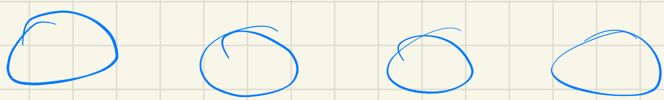
- <u>Lemma 3</u> (Dirac 1961)

  $G$ nicht vollständig & jeder min. Sep. ist Clique

  $\Rightarrow$ es ex. zwei simpl. Knoten $x, y$ mit $xy \notin E$.

- **Beweis:** Sei $a,b \in V$ mit $ab \notin E$ und $S$ min. Sep.
- $X_a$ (bzw. $X_b$) die Zsh.komp. von $a$ (bzw. $b$) in $G-S$
- $G_a := G[X_a \cup S]$, $G_b := G[X_b \cup S]$



- Jeder Sep. in $G_a$ oder $G_b$ ist auch ein Sep. in $G$, da $S$ vollständig ist.
- Falls $G_a$ vollständig, $x := a$; andernfalls ex. nicht benachbarte simpliziale Knoten $x_1, x_2$ in $G_a$ nach Induktion.
- Wegen $x_1 x_2 \notin E$ gilt $x_1 \notin S$ oder $x_2 \notin S$

- OE $x_1 \notin S$. Setze $x := x_1$
- In jedem Fall ist $x \in X_a$ simplizial in $G$
- Analog erhalten wir $y \in X_b$ mit $y$ simplizial in $G$.
- $(X_a \times X_b) \cap E = \emptyset \implies xy \notin E$. #

- <u>Satz:</u> Äquivalent sind
  (i) $G$ ist chordal.
  (ii) Jeder min. Sep. ist eine Clique.
  (iii) Es ex. perfekte Ordnung.

- <u>Beweis:</u> (i) $\Rightarrow$ (ii): Lemma 2
  (iii) $\Rightarrow$ (i): Lemma 1
  (ii) $\Rightarrow$ (iii): nach Lem. 3 ex. simplizialer Knoten $x_1$. Da $N(x_1)$ eine Clique bilden, ist jeder Sep. von $G - x_1$ auch ein Sep. in $G$. Mit Induktion besitzt $G - x_1$ eine perfekte Ordnung $(x_2, \ldots, x_n)$.

$\Rightarrow$ perfekte Ordnung $(x_1, \dots, x_n)$ von $G$. #

- <u>Satz</u> (Berge 1961, Hajnal, Surányi 1958)
  Chordale Graphen sind perfekt.

- <u>Beweis:</u>
- Induzierte UG von chordalen Graphen sind chordal.
  Es genügt deshalb $\chi(G) \leq \omega(G)$ zu zeigen.
- Sei $(x_1, \dots, x_n)$ eine perfekte Ordnung auf $G$
- $G' = G - x_1$
- $\omega' = \omega(G')$, $\chi' = \chi(G')$.
- Mit Induktion: $\chi' \leq \omega'$
- <u>1. Fall</u>: $|N(x_1)| < \omega'$:
  Wir können $x_1$ mit einer in $N(x_1)$ nicht verwendeten Farbe färben.
  $\Rightarrow \chi(G) = \chi' \leq \omega' = \omega(G)$
- <u>2. Fall</u>: $|N(x_1)| = \omega' \Rightarrow \omega(G) = \omega' + 1$,
  $\chi(G) \leq \chi' + 1 \Rightarrow \chi(G) \leq \omega(G)$. #

# Erkennen Chordaler Graphen

- **Lemma:** $(x_1, \dots, x_n)$ ist perfekte Ordnung
$\Leftrightarrow$ $\forall i < j$:
$[P = x_i y_1 \cdots y_m x_j$ Pfad in $G$ mit $y_i \in \{x_1, \dots, x_{i-1}\}$
für alle $i$ $\Rightarrow$ $x_i x_j \in E]$.

- **Beweis:**
„$\Leftarrow$": Seien $x_k, x_\ell$ zwei Nachbarn von $x_i$
mit $i < k < \ell$.
$x_k x_i x_\ell$ Pfad $\Rightarrow$ $x_k x_\ell \in E$
$\Rightarrow N_{G'}(x_i)$ Clique in $G' = G[x_i, \dots, x_n]$

„$\Rightarrow$": Sei $m \geq 0$ minimal und $y_s = x_t$ mit $t$ minimal. dies def. $s$
$N(x_t)$ Clique in $G[x_t, \dots, x_n]$
$\Rightarrow$ $y_s = x_t$ kann aus $P$ entfernt werden
$\Rightarrow$ $m$ nicht minimal $\Rightarrow$ $m = 0$ und $x_i x_j \in E$. #

Def:

- Die Maximum-Adjazenz-Suche berechnet eine Reihenfolge $(x_n, \dots, x_1)$ von Knoten $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ wie folgt:
  - $x_n \in V$ beliebig
  - $x_i \in V \setminus \{x_n, \dots, x_{i+1}\}$ mit $x_i$ ist zu maximal vielen Knoten aus $\{x_n, \dots, x_{i+1}\}$ benachbart.

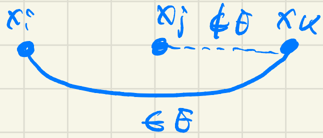
- Lemma: Sei $G$ chordal und $(x_n, \dots, x_1)$ die Reihenfolge der Knoten aus der Maximum-Adjazenz-Suche. Dann ist $(x_1, \dots, x_n)$ eine perfekte Ordnung.

- Beweis: Sei $x_i, x_j, x_k \in V$ mit $i < j < k$

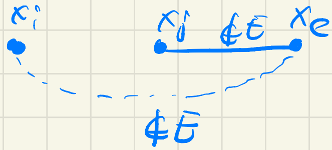
  $x_i x_k \in \bar{E}$, $x_j x_k \notin E$.

Beh.: Dann ex. $x_e \in V$ mit $j < e$ und

$x_j x_e \in \bar{E}$, $x_i x_e \notin \bar{E}$




$\Rightarrow \exists x_e$ :



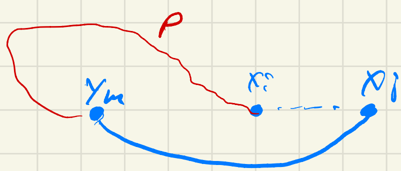

nach Max.-Adj.-Suche, da $x_j$ vor $x_i$ aufgenommen wurde.

Ang. $(x_1, \dots, x_n)$ nicht perfekt.

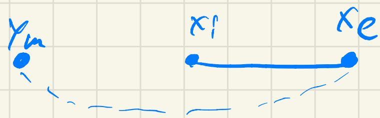
Dann ex. $x_i x_j \notin E$, $i < j$,

$P = x_i y_1 \cdots y_m x_j$ Pfad mit $y_s \in \{x_1, \dots, x_{i-1}\}$ $\forall s$.

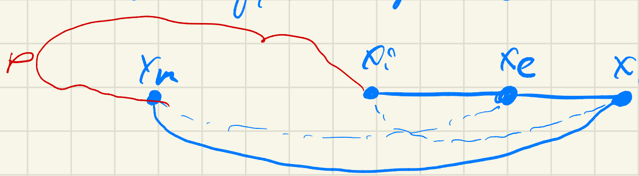
Œ $j$ maximal, dann $i$ maximal. Dann $m > 0$ min.




Vorige Beh.:




Max. von $j, i$ liefert Kante $x_e x_j \in E$



$\Rightarrow \exists$ Kreis $x_i\, y_1 \ldots y_m\, x_j\, x_e\, x_i$ der Länge $\geq 4$

OE keine Sehne $x_e y_i$ mit $i \neq m$, sonst betrachte wir Unterkreis

$x_j\, y_m \ldots y_i\, x_e\, x_j$ der immer noch Länge $\geq 4$ hat. $\lightning$ zu $G$ chordal. #

- Es folgt:
- <u>Satz</u>: Sei $(x_n, \ldots, x_1)$ Max.-Adj.-Suche. Dann

  $G$ chordal $\Leftrightarrow$ $(x_n, \ldots, x_1)$ perfekte Ordnung.

- <u>Beweis</u>: „$\Leftarrow$": Satz über chordale Graphen.

  „$\Rightarrow$": Lemma. #

- <u>Algorithmus</u>:

$O(n+m)$ • Berechne: $(x_n, \ldots, x_1)$ Max.-Adj.-Suche

$O(n+m)$ • Teste, ob $(x_n, \ldots, x_1)$ perfekte Ordnung.