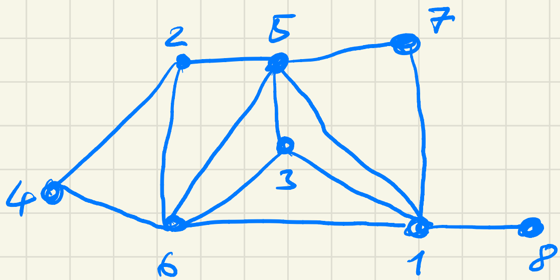
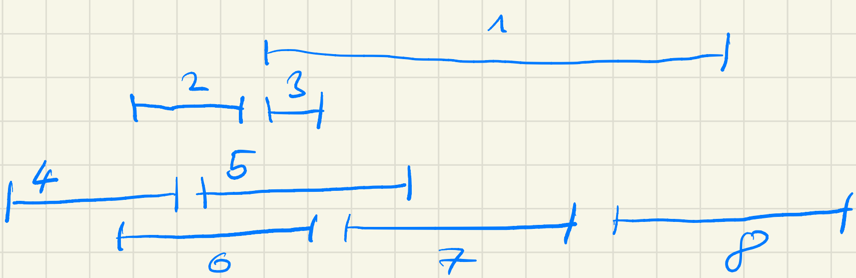
Intervallgraphen

- **Def.:** $G=(V,E)$ Intervallgraph, falls ex. $I = \{ [a_x, b_x] \subseteq \mathbb{R} \mid a_x < b_x,\ x \in V \}$ mit $xy \in E \iff [a_x, b_x] \cap [a_y, b_y] \neq \emptyset$.

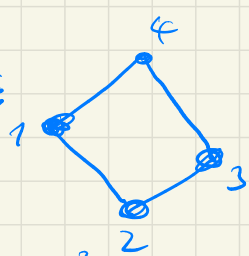
- **Bsp.:**



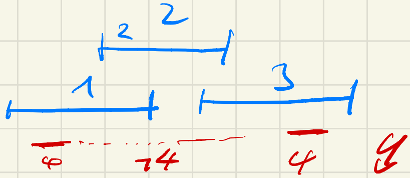
ist Int.gr., weil

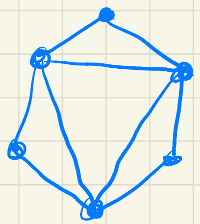


- **Bsp.:**



ist kein Int.gr.
(und nicht chordal)





ist kein Int. gr.
(aber chordal)

- **Bem.**: Ind. UG von Int. gr. sind Int. gr.
- **Satz**: Intervallgraphen sind chordal.

Beweis: Es reicht, einen simplizialen Knoten zu finden.

Wähle $x \in V$ so, daß $b_x = \min \{ b_y \mid y \in V \}$.

Dann ist x simplizial:

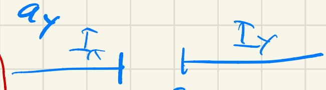
$$\left.\begin{array}{l} [a_x, b_x] \cap [a_y, b_y] \neq \emptyset \Longrightarrow b_x \in [a_y, b_y] \\ [a_x, b_x] \cap [a_z, b_z] \neq \emptyset \Longrightarrow b_x \in [a_z, b_z] \end{array}\right\} \begin{array}{l} [a_y, b_y] \\ \cap \\ [a_z, b_z] \end{array} \neq \emptyset$$

#

- **Satz**: G Intervallgraph $\Longrightarrow$ $\overline{G}$ TRO

Beweis: Setze $x < y$, falls $b_x < a_y$

Trivialerweise ist $(V, <)$ TO von $\overline{G}$.



#

- **Satz**: G Intervallgraph $\Longleftrightarrow$ G chordal & $\overline{G}$ TRO
- **Beweis**: „$\Longrightarrow$": vorige Sätze

„$\Longleftarrow$":

Mit Ind. nach $|V|$ zeigen wir:

$(V, <)$ TO von $\overline{G}$, G chordal $\Rightarrow$

$\exists$ Intervalle $I_x = [a_x, b_x]$ so, dass $x<y \Leftrightarrow b_x < a_y$

- Sei $v \in V$ simplizial und auf $G-v$ eine entsprechende Menge von Intervallen $\{I_y \mid y \in V\setminus\{v\}\}$ bereits konstruiert.

- $V \setminus \{v\}$ zerlegt sich in 3 Mengen

$$X := \{ x \in V \mid x < v \}$$

$$Y := \{ y \in V \mid v < y \}$$

$$Z := \{ z \in V \mid vz \in E \}$$

- $\forall x \in X \; \forall y \in Y : \; x < y$

$\Longrightarrow b_x < a_y \quad \forall x \in X \; \forall y \in Y$

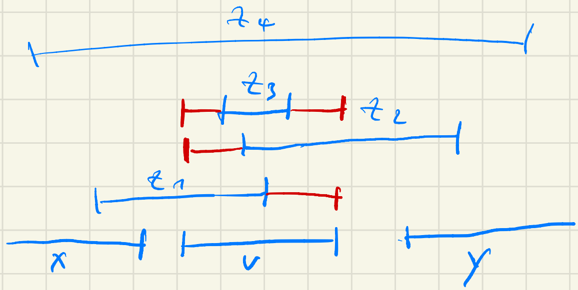
- Setze $a_v = \max \{ b_x \mid x \in X \} + \varepsilon$ und

$$b_v = \min \{ a_y \mid y \in Y \} - \varepsilon$$

für $\varepsilon > 0$ klein mit $a_v < b_v$

- Für $z \in Z$ def. wir neue Intervalle I'_z:

$I'_z := [\min\{a_v, a_z\}, \max\{b_v, b_z\}]$

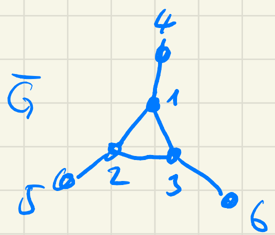


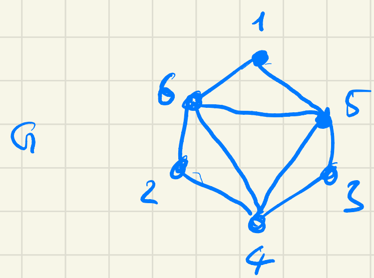
- Die einzige neuen Überschneidungen sind solche zwischen Intervalle zu $z \in Z$.

  v simplizial $\Rightarrow$ Z Clique, d.h. keine neuen Überschneidungen.

- $\Longrightarrow$ G Int.-gr. #

- <u>Bsp.:</u>





- <u>Bem.:</u> Linearzeit-Alg. für TROs liefert nicht automatisch auch Lin.zeit-Alg. für co-TROs (mehr Kanten in $\overline{G}$ möglich).

Permutationsgraphen

- **Def.:** Sei $\pi: \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ Permutation

  $G[\pi] = (V, E)$ mit

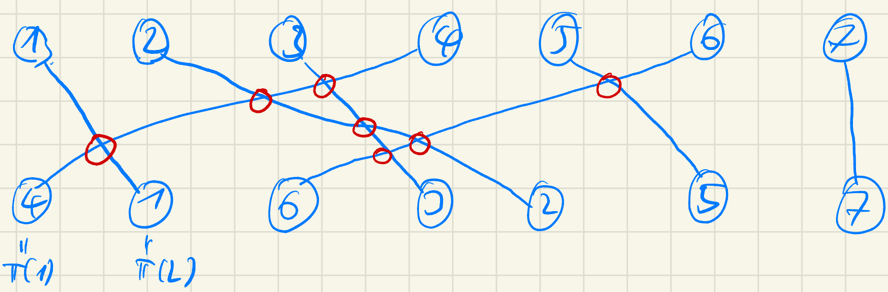
  $V = \{1, \dots, n\}$ und

  $ij \in E \iff (i-j)(\pi(i) - \pi(j)) < 0$

  Falls π ex. mit $G \cong G[\pi]$, dann heißt

  G Permutationsgraph.

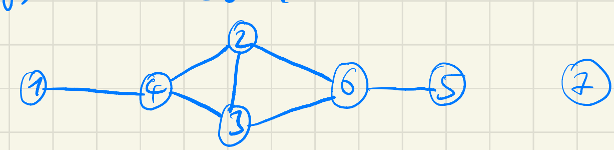
- **Bsp.:** $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$



Kante ij ex., falls Linie $i - \pi(i)$ sich mit

Linie $j - \pi(j)$ kreuzt.

$G[\pi]$



- **Def.:** $\pi = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \pi(1) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix} \Rightarrow \pi_\rho = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \underbrace{\pi(n) \; \cdots \; \pi(1)}_{\text{„gespiegelt"}} \end{pmatrix}$

[ρ für „reverse"]

- **Lem.:** G Perm.gr. $\Rightarrow$ $\bar{G}$ Perm.gr.
- **Beweis:** $G = G[\pi] \Rightarrow \bar{G} = G[\pi_\rho]$. #
- **Lem.:** G Perm.-gr. $\Rightarrow$ G TRO.
- **Beweis:** Setze $(i,j) \in F$, falls $ij \in E$ und $i < j$

Seien $(i,j), (j,k) \in F$.

Dann $\pi(i) > \pi(j) > \pi(k)$.

Damit $ik \in E$ und $(i,k) \in F$. #

- **Satz:** G Permutationsgraph $\Leftrightarrow$ G TRO & $\bar{G}$ TRO
- **Beweis:** „$\Rightarrow$" vorige zwei Lemmata.

„$\Leftarrow$" Seien (V, F_1) bzw. (V, F_2) TO von G bzw. $\bar{G}$

- **Beh.:** $(V, \underbrace{F_1 \cup F_2}_{=F})$ ist TO
- **Beweis der Beh.:**

Sei
$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "\in F_2"] & \\ \bullet \arrow[ur, "\in F_1"] & & \bullet \arrow[ll, "\in F"] \end{tikzcd}$$

$\in F_1$ ↯ zu F_1 TO

$\in F_2$ ↯ zu F_2 TO

↯ also

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "F_2"] & \\ \bullet \arrow[ur, "\in F_1"] \arrow[rr, "\in F"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$

• F TO eines vollst. Gr.

$\Rightarrow$ F ist lineare/totale Ordnung

• OE Schreibe $V = \{1, \dots, n\}$ mit $(i, i+1) \in F$

• $F' := F_1^{-1} \cup F_2$ lineare Ordnung

• Schreibe $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ mit $(x_i, x_{i+1}) \in F'$

• Def. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$

• Nun gilt $G = G[\pi^{-1}]$. #

Hausaufg.: nochmals durchdenken