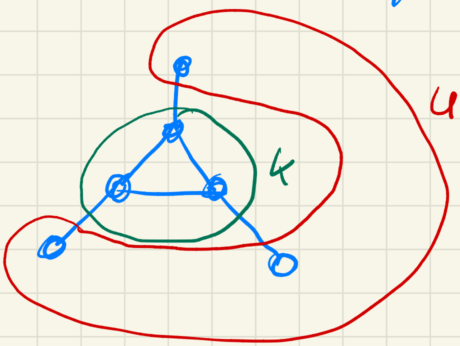
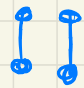
Splitgraphen

- **Def.:** $G=(V,E)$ Splitgraph, falls $V = K \cup U$ mit K Clique und U unabh.
- **Bsp.:**



- $2K_2$ = 2 disj. Kopien von K_2 = $\overline{C_4}$ =



- **Satz:** Äquivalent sind:

ⓐ G Splitgraph.

ⓑ G und $\overline{G}$ sind beide chordal.

ⓒ G enthält keinen induzierten UG der Form $2K_2$, C_4 oder C_5.

- **Beweis:** ⓐ ⇒ ⓑ: G Split ⇒ $\overline{G}$ Split

z.z. G chordal. Sei $V = \underset{\text{Clique}}{K} \dot\cup \underset{\text{unabh.}}{U}$.

OE $U \neq \emptyset$. Sei $u \in U$. Dann $N(u) \subseteq K$.

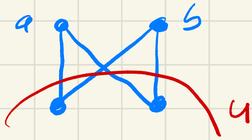
Insbes. $N(u)$ Clique.

[Beachte: ind. UG von Split. sind Split.]

(b) $\Rightarrow$ (c): Klar, da $\overline{2K_2} = C_4$

(c) $\Rightarrow$ (a): Sei U unabh. Menge maximaler Größe, sodass $G-U$ möglichst viele Kanten besitzt.

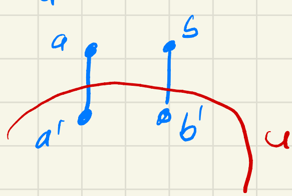
- $K = V \setminus U$. z.z. K Clique
- Ang. $\exists\, a,b \in K$ mit $a \neq b$, $ab \notin E$
- <u>1. Fall:</u> a,b haben ≥ 2 gemeinsame Nachbarn in U



$\longrightarrow C_4$ $\lightning$

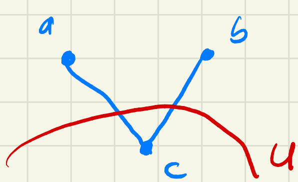
- <u>2. Fall:</u> a,b haben keine gemeinsamen Nachbarn in U

Max. von U:



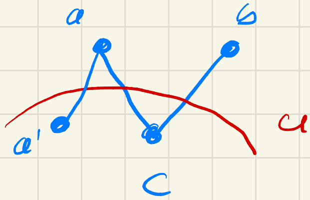
$\longrightarrow 2K_2$ $\lightning$

- <u>3. Fall:</u> a,b haben genau 1 gemeinsamen Nachbarn in U



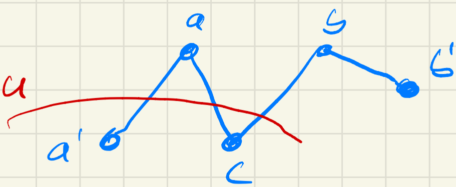
a, b keine weiteren Nachbarn in U:

$U' := (U \setminus \{c\}) \cup \{a, b\}$ unabh. ↯ zu Max. U



b keine Nachbarn außerhalb von $\{c\} \cup N(c)$:

$U' := (U \setminus \{c\}) \cup \{b\}$ unabh. ↯ zu Max. Anz. Kanten in $G - U$



$\not\exists\, b' \in U$

$ab' \in E \rightsquigarrow C_4$ ↯

$ab' \notin E,\ a'b' \in E \rightarrow C_5$ ↯

$ab' \notin E,\ a'b' \notin E \rightarrow 2K_2$ ↯ #

- **Def.:** $G = (V, E)$ Graph. Schreibe $V = \{x_1, \dots, x_n\}$

mit $d_{x_i} \geq d_{i+1}$ $\forall\, 1 \leq i < n$

$$s(G) = (d_{x_1}, \dots, d_{x_n})$$

Gradsequenz von G.

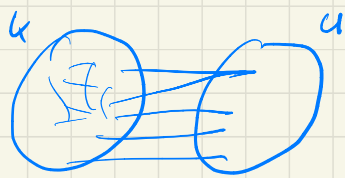
- **Bem.:** $G = (V, E)$ Split, $V = \overset{\text{Clique}}{K} \,\dot\cup\, \overset{\text{unabh.}}{U}$ mit $|U|$ max.

$m := |K|$, $s(G) = (d_1, \ldots, d_n)$. Dann

(a) $d_i \geq m$ für $1 \leq i \leq m$

(b) $d_j \leq m$ für $m < j \leq n$

(c) $\sum_{i=1}^{m} d_i = \underbrace{m(m-1)}_{2 \cdot \binom{m}{2}} + \sum_{j=m+1}^{n} d_j$



- **Satz:** (Erdős, Gallai 1960)

$(d_1, \ldots, d_n)$ mit $d_1 \geq \ldots \geq d_n$ ist Gradsequenz gdw

(1) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ ist gerade, und

(2) $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} \min\{k, d_j\}$$

- Korollar: $s(G) = (d_1, \ldots, d_n)$. Dann G Splitgraph gdw $\exists m \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$\sum_{i=1}^{m} d_i = m(m-1) + \sum_{j=m+1}^{n} d_j .$$

- Beweis (Satz & Korollar):

„$\Longrightarrow$": Für $s(G)$ ist $\sum_{i=1}^{n} d_i$ gerade.

Sei $1 \le k \le n$. Z

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} \min\{k, d_j\} \le k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} d_j$$

$K = \{x_1, \ldots, x_k\}$ keine Clique: nehme Kante hinzu

$U = \{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ nicht unabh.: lese Kante weg

OE K Clique, U unabh.

$j \ge k+1 \Longrightarrow d_j = \min\{k, d_j\}$

Nach voriger Bem.:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} \min\{k, d_j\} = k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} d_j$$

K keine Clique oder U nicht unabh.:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i < k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} d_j$$

Beweis des Korollars

"$\Leftarrow$" Knotenmenge $\{x_1, \dots, x_n\}$

G Teilrealisierung mit Index r von $s = (d_1, \dots, d_n)$:

ⓐ $d_{x_i} = d_i \quad \forall i \in \{1, \dots, r-1\}$

ⓑ $d_{x_j} \leq d_j \quad \forall j \in \{r, \dots, n\}$

ⓒ $U = \{x_{r+1}, \dots, x_n\}$ unabh.

$(V, \emptyset)$ Teilrealisierung mit Index 1

r <u>kritisch</u>, falls $d_{x_r} < d_r$

Sei G Teilrealisierung mit kritischem Index r.

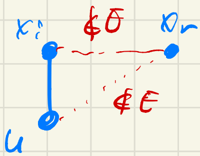
$x_i \leftrightarrow x_j$ Kante, $x_i \not\leftrightarrow x_j$ keine Kante

<u>1. Fall:</u> $x_r \not\leftrightarrow x_k$ mit $d_{x_k} < d_k$.

Dann $k > r$. Füge Kante $x_r x_k$ hinzu.

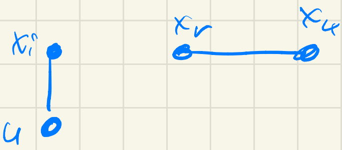
<u>2. Fall:</u> $x_r \not\leftrightarrow x_i$ für $i < r$

$d_{x_i} = d_i \geq d_r > d_{x_r} \Rightarrow \exists\, u \in N(x_i) \setminus N(x_r)$



a) $d_r - d_{x_r} \geq 2$: $- x_i u$, $+ x_i x_r$, $+ u x_r$

b) $d_r - d_{x_r} = 1$: $\exists k > r$ mit $d_{x_k} < d_k$, da $\sum$ Grade gerade. $x_r x_k \in E$ nach 1. Fall.



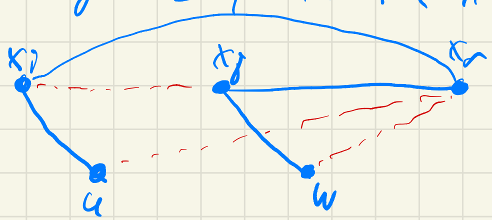
$-x_i u$, $-x_r x_k$, $+ x_i x_r$, $+ u x_r$

<u>3. Fall:</u> $x_1, \dots, x_{r-1} \in N(x_r)$, $x_i \not\leftrightarrow x_j$ für $i < j < r$:

$d_{x_i} \geq d_{x_j} > d_{x_r}$

$\exists u \in N(x_i) \setminus N(x_r)$, $\exists w \in N(x_j) \setminus N(x_r)$

[$u = w$ möglich] , $u, w \notin \{x_1, \dots, x_r\}$



$-u x_i$, $-w x_j$, $+ x_i x_j$, $+ u x_r$

<u>4. Fall:</u> $\{x_1, \dots, x_r\}$ Clique , $d_{x_k} \neq \min\{r, d_k\}$ für $k > r$

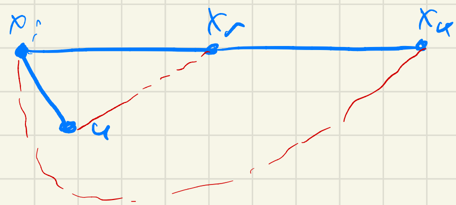
$\{x_{r+1}, \dots, x_n\}$ unabh.

$d_{x_k} \leq d_k$, $d_{x_k} \leq r \Rightarrow d_{x_k} < \min\{r, d_k\}$

Wg. 1. Fall: $x_k \leftrightarrow x_r \implies d_{x_k} < r$

$\exists\, i < r: \; x_i \not\leftrightarrow x_r$

$\exists\, u \in N(x_i) \setminus \left(N(x_r) \cup \{x_r\}\right)$



$- x_i u \;, \; + x_i x_k \;, \; + u x_r$

<u>Keiner der Fälle:</u>

$K = \{x_1, \dots, x_r\}$ Clique

$U = \{x_{r+1}, \dots, x_n\}$ unabh. Menge

$d_{x_k} = \min\{r, d_k\} \quad \forall\, k > r$

$$r(r-1) + \sum_{k=r+1}^{n} \min\{r, d_k\} = r(r-1) + \sum_{k=r+1}^{n} d_{x_k}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} d_{x_i} < \sum_{j=1}^{r} d_j \le r(r-1) + \sum_{k=r+1}^{n} \min\{r, d_k\} \quad ⚡$$

#