M. Kufleitner Wintersemester 2020/2021

Graphentheorie

Aufgabenblatt 1

Besprechung am 12. November 2020

1. Für $n \geq 1$ sei V_n die Menge aller Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$. Sei G_n der Graph mit der Knotenmenge V_n, für den zwei Knoten A und B durch eine Kante verbunden sind genau dann, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt.

   a) Zeichnen Sie den Graphen G_3.

   b) Wie viele Knoten und wie viele Kanten hat der Graph G_n?

2. Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger ungerichteter Graph. Zeigen Sie, dass G oder sein Komplementgraph $\overline{G}$ zusammenhängend ist.

3. Sei $G = (V, E) \neq \emptyset$ ein ungerichteter Graph und sei $\delta = \min\{d_v \mid v \in V\}$. Zeigen Sie, dass $P_{\delta+1}$ ein Teilgraph von G ist.

4. Ein *Baum* ist ein nicht-leerer zusammenhängender Graph ohne einfache Kreise (der Länge ≥ 3). Zeigen Sie: G ist genau dann ein Baum, wenn G zusammenhängend ist und $e = n - 1$ gilt.

5. Ein Automorphismus eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine bijektive Abbildung $f : V \to V$ mit
$$\forall x, y \in V \colon \{x, y\} \in E \;\Leftrightarrow\; \{f(x), f(y)\} \in E.$$
   Sei $G = (V, E)$ ein Baum, und sei f ein Automorphismus von G. Zeigen Sie, dass dann f einen Knoten von G oder eine Kante von G fest lässt, d.h.
$$\exists v \in V \colon f(v) = v \;\vee\; \exists \{v, w\} \in E \colon \{f(v), f(w)\} = \{v, w\}.$$