M. Kufleitner | Wintersemester 2020/2021

Graphentheorie

Aufgabenblatt 2

Besprechung am 3. Dezember 2020

1. In der Ebene (bzw. auf der Kugeloberfläche) kann bereits der K_5 nicht ohne Kantenüberschneidung gezeichnet werden. Zeigen Sie, dass man auf der Torusoberfläche sogar einen K_7 kreuzungsfrei einbetten kann.

2. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Facetten eines planaren Graphen gerade ist, wenn alle Facetten Dreiecke sind.

3. Zeigen Sie, dass jeder Graph so in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden kann, dass alle Kanten des Graphen gerade Linien sind und keine zwei Kanten sich schneiden.

4. Gegeben sei eine endliche Menge von Geraden in der Ebene, so dass sich in keinem Punkt mehr als zwei Geraden schneiden. Werden die Schnittpunkte als Knoten und die dazwischenliegenden Geradensegmente als Kanten aufgefasst, dann erhalten wir einen planaren Graph G. Zeigen Sie, dass G eine Färbung mit 3 Farben besitzt.

5. Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit 15 Facetten. Wenn alle Knoten den gleichen ungeraden Grad haben, wieviele Knoten hat dann G.

6. Zeigen Sie: Es existiert ein Graph G mit n Knoten und G isomorph zu $\overline{G}$ genau dann, wenn $n \equiv 0 \bmod 4$ oder $n \equiv 1 \bmod 4$ gilt.

7. Ein *Schnittgraph* besteht aus einer Knotenmenge $V \subseteq 2^M$ für eine beliebige endliche Menge M. Eine Kante xy wird gezeichnet, falls $x \cap y \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass jeder Graph ein Schnittgraph ist.

8. Ein *Wald* ist ein Graph, bei dem jede Zusammenhangskomponente ein Baum ist. Zeigen Sie: G ist genau dann ein Wald, wenn $e = n - z$ gilt. Hierbei ist z die Anzahl der Zusammenhangskomponenten.

9. Zeigen Sie, dass der folgende Graph nicht planar ist: