M. Kufleitner — Wintersemester 2020/2021

Graphentheorie

Aufgabenblatt 3

Besprechung am 10. Dezember 2020

1. Der *Mycielski-Graph* $\mu(G) = (V', E')$ eines Graphen $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = \{ x_1, \ldots, x_n \}$ ist definiert durch $V' = V \cup \{ y_1, \ldots, y_n, z \}$ und $E' = E \cup \{ x_i y_j \mid x_i x_j \in E \} \cup \{ y_j z \mid 1 \leq j \leq n \}$. Ein Graph heißt *dreiecksfrei*, wenn er K_3-frei ist. Zeigen Sie:
   a) Wenn G dreiecksfrei ist, dann ist auch $\mu(G)$ dreiecksfrei.
   b) Für die Färbungszahl von $\mu(G)$ gilt $\chi(\mu(G)) = \chi(G) + 1$.

2. Warum liefert der Standardbeweis für die 5-Färbbarkeit von planaren Graphen keinen Beweis für deren 4-Färbbarkeit (nehmen Sie an, dass G' mit 4 Farben gefärbt werden kann; je nach Beweistechnik entsteht G' hierbei aus G durch Entfernen eines Knotens oder durch Kontraktion zweier Kanten).

3. Sei $G = (V, E)$ ein dreiecksfreier planarer Graph. Zeigen Sie: Wenn alle Konten in V mindestens Grad 3 haben, dann existiert eine Kante $xy \in E$ mit $d_x = 3$ und $d_y \leq 5$.

4. Im Folgenden sei $G = (V \mathbin{\dot\cup} W, E)$ ein bipartiter Graph mit $E \subseteq V \times W$. Zeigen Sie:
   a) Es existiert ein planarer bipartiter Graph G mit Grad $d_x = 3$ für alle $x \in V$ und $d_x = 5$ für alle $x \in W$.
   b) Es existiert *kein* planarer bipartiter Graph G mit Grad $d_x = 3$ für alle $x \in V$ und $d_x = 5$ für alle $x \in W$, bei dem alle Knoten aus W an mindestens einer Facette der Länge 6 liegen.

5. Zeigen Sie, dass zur Liste L der Farben $\{ 1, 2, 3, 4 \}$ im folgenden Graphen (links) mit 17 Knoten keine L-Listenfärbung existiert. Konstruieren Sie daraus einen planaren Graphen mit 63 Knoten, der nicht 4-listenfärbbar ist (auf der rechten Seite finden Sie hierzu einen kleinen Hinweis).