M. Kufleitner Wintersemester 2020/2021

Graphentheorie

Aufgabenblatt 4

Besprechung am 7. Januar 2021

1. Geben Sie einen Graph G an mit $\omega(G) = \chi(G)$ und $\alpha(G) < \kappa(G)$.

2. Zeigen Sie: $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$.

3. Ein Graph H ist ein *Minor* eines Graphen G, falls H durch k-fache Kantenkontraktion ($k \geq 0$) aus einem Untergraphen von G entsteht. Zeigen Sie folgende Variante des Satzes von Kuratowski: G ist genau dann planar, wenn $K_{3,3}$ und K_5 keine Minoren von G sind.

4. Ein *kreisartig planarer* Graph ist ein planarer Graph, bei dem alle Knoten auf der äußeren Facette liegen. Zeigen Sie:

   a) Bei kreisartig planaren Graphen gilt $e \leq 2n - 3$.

   b) Ein Graph G ist genau dann kreisartig planar, wenn G weder eine Unterteilung des $K_{2,3}$ noch des K_4 enthält. *Hinweis:* Betrachten Sie $G * K_1$, d.h. alle Knoten in G werden mit einem neuen Knoten verbunden.

   c) Kreisartig planare Graphen mit mindestens 4 Knoten besitzen zwei nicht benachbarte Knoten x, y mit $d_x, d_y \leq 2$.

   d) Kreisartig planare Graphen sind 3-färbbar.

5. Sei $0 < p < 1$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig, und sei V eine Knotenmenge mit n Knoten. Im Folgenden betrachten wir das Zufallsexperiment, bei dem zwischen je zwei verschiedenen Knoten $x, y \in V$ eine Kante xy (unabhängig von anderen Kanten) mit Wahrscheinlichkeit p gesetzt wird. Sei $G = (V, E)$ der resultierende Graph. Zeigen Sie: Für $n \longrightarrow \infty$ erfüllt der Grenzwert der Wahrscheinlichkeit:

   $$\mathbb{P}(\, G \text{ ist } k\text{-zusammenhängend}\,) \longrightarrow 1.$$

   Hinweis: Betrachten Sie die folgende Eigenschaft $P_{i,j}$: G hat mindestens $i + j$ Knoten und für je zwei disjunkte Knotenmengen $I, J \subseteq V$ mit $|I| \leq i$ und $|J| \leq j$ existiert stets ein Knoten $x \notin I \cup J$ mit $x \times I \subseteq E$ und $(x \times J) \cap E = \emptyset$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(\, P_{i,j}\,) \longrightarrow 1$.

6. Zeigen Sie, dass das folgende Problem in Polynomialzeit entscheidbar ist (hierbei bezeichnet $cr(G)$ die *Kreuzungszahl* von G).
   EINGABE: Graph G.
   FRAGE: Gilt $cr(G) = 1$?