M. Kufleitner Wintersemester 2020/2021

Graphentheorie

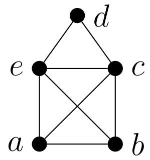
Aufgabenblatt 5

Besprechung am 28. Januar 2021

1. Sei $c : \mathbb{N} \to \{1, \ldots, k\}$ eine beliebige Färbung mit k Farben. Zeigen Sie, dass $x, y, z \in \mathbb{N}$ existieren mit $x + y = z$ und $c(x) = c(y) = c(z)$.

2. Ein *Eulerpfad* eines Graphen ist ein Pfad, welcher jede Kante genau einmal benutzt. Ein *Eulerkreis* ist ein Eulerpfad, welcher ein Kreis ist.

   a) Wieviele Eulerpfade besitzt der folgende Graph (das Haus vom Nikolaus)? Ein möglicher Eulerpfad ist beispielsweise *abcdecaeb*.

   b) Geben Sie einen Graph G an, der einen Eulerkreis besitzt, dessen Knotenzahl gerade ist, und dessen Kantenzahl ungerade ist. Welches ist die minimale Knotenzahl, die notwendig ist?

   c) Zeigen Sie: Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn alle Knoten geraden Grad haben. Außerdem lässt sich in diesem Fall ein Eulerkreis in Linearzeit berechnen.

   d) Zeigen Sie: Ein gerichteter zusammenhängender Graph besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn bei jedem Knoten der Eingangsgrad gleich dem Ausgangsgrad ist.

   e) Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeigen Sie: Es existiert ein Wort $w \in \Sigma^*$ der Länge $|w| = |\Sigma|^k + k - 1$, welches jedes Wort der Länge k genau einmal als Faktor enthält.

3. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $x \in V$. Der Graph G' entstehe aus G durch Hinzufügen eines neuen Knotens x' und der Kanten $x'x$ sowie $x'y$ mit $xy \in E$. Zeigen Sie: Wenn G perfekt ist, dann ist auch G' perfekt.

4. Zeigen Sie, dass in jedem perfekten Graphen G eine Menge $\mathcal{U}$ von unabhängigen Untergraphen und eine Menge $\mathcal{K}$ von vollständigen Untergraphen existiert, derart dass $\bigcup \mathcal{U} = G = \bigcup \mathcal{K}$ und der Schnitt $U \cap K$ für beliebige $U \in \mathcal{U}$ und $K \in \mathcal{K}$ nicht leer ist.