

# Graphentheorie

Wintersemester 2020/2021

Manfred Kufleitner\*

4. November 2020

\*Ergänzungen und Modifikationen: Volker Diekert, Jan Philipp Wächter WS 2017/18

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Einführung</b>	<b>5</b>
2.1	Grundbegriffe . . . . .	5
2.2	Einige spezielle Graphen . . . . .	8
2.3	Der Grad eines Knotens . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Eulergraphen</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Cographen</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Bäume</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Bipartite Graphen</b>	<b>18</b>
<b>7</b>	<b>Der Satz von Menger</b>	<b>19</b>
<b>8</b>	<b>Planare Graphen</b>	<b>21</b>
8.1	Die Eulerformel . . . . .	22
8.2	Der Satz von Kuratowski . . . . .	25
8.3	Färbbarkeit von planaren Graphen . . . . .	31
8.4	Polygone . . . . .	36
8.5	Der Satz von Grötzsch . . . . .	40
<b>9</b>	<b>Gradsequenzen</b>	<b>45</b>
<b>10</b>	<b>Einige Graphparameter</b>	<b>46</b>
<b>11</b>	<b>Perfekte Graphen</b>	<b>51</b>
11.1	Der Heiratssatz . . . . .	53
<b>12</b>	<b>Chordale Graphen</b>	<b>54</b>
12.1	Erkennen von chordalen Graphen . . . . .	57
<b>13</b>	<b>Transitiv orientierbare Graphen (TROs)</b>	<b>59</b>
<b>14</b>	<b>Intervallgraphen</b>	<b>65</b>
<b>15</b>	<b>Permutationsgraphen</b>	<b>67</b>
<b>16</b>	<b>Splitgraphen</b>	<b>72</b>
<b>17</b>	<b>Bipartite Graphen</b>	<b>76</b>
17.1	Ein Hauch von Perfektheit . . . . .	76

17.2 Der Heiratssatz . . . . .	76
<b>18 Die Probabilistische Methode</b>	<b>78</b>
<b>19 Die Probabilistische Lupe</b>	<b>80</b>
19.1 Die Kreuzungszahl . . . . .	80
<b>20 Extremale Graphentheorie</b>	<b>81</b>
<b>21 Eigenwerte von Graphen</b>	<b>84</b>
<b>22 Ramsey-Theorie</b>	<b>85</b>
<b>23 Übersicht</b>	<b>92</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>93</b>

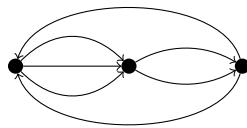
# 1 Einleitung

Graphen dienen der Beschreibung und Veranschaulichung von Relationen zwischen Objekten. Die Idee ist es, Objekte durch Punkte darzustellen und falls zwischen zwei Objekten eine Verbindung besteht, eine Linie zwischen ihnen zu ziehen. Die Objekte bezeichnet man als Knoten und die Verbindungen zwischen ihnen als Kanten. Manchmal benutzt man Beschriftungen, um die Art der Verbindung zu kennzeichnen oder um die Objekte in Klassen einzuteilen. Durch Abstraktion kann man sehr viele Zusammenhänge durch Graphen darstellen. Beispielsweise könnte man als Knoten alle Städte und als Kanten das Straßennetz nehmen, d.h. wir zeichnen eine Kante zwischen zwei Städten, falls diese durch eine Straße verbunden sind. Ein anderes Beispiel ergibt sich mit Filmen und Schauspielern als Knotenmenge. Wir ziehen eine Kante zwischen einem Schauspieler  $x$  und einem Film  $y$ , falls  $x$  in  $y$  mitgewirkt hat. Wir können auch die Spielstellungen eines Spiels als Knotenmenge auffassen; eine Kante ziehen wir von einer Spielstellung  $x$  zu einer Spielstellung  $y$ , falls sich  $x$  durch einen Zug nach  $y$  überführen lässt. Mit Graphen lassen sich die unterschiedlichsten Sachverhalte modellieren. Allgemein lassen sich Relationen  $R \subseteq A \times B$  als Graph auffassen, indem man  $A \cup B$  als Knotenmenge wählt und eine Kante zwischen  $x, y \in A \cup B$  zieht, falls  $(x, y) \in R$  gilt. Diese Art der Darstellung hat mehrere Vorteile. Der Erste ist, dass Graphen sich sehr gut „*graphisch*“ veranschaulichen lassen. Der andere Vorteil ist, dass man zur Lösung von Problemen bereits existierende Resultate und Verfahren aus der Graphentheorie heranziehen kann. Außerdem erlaubt die Graphentheorie einheitliche Begriffsbildungen.

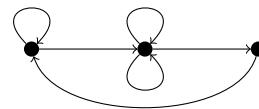
# 2 Einführung

## 2.1 Grundbegriffe

Es existieren mehrere verschiedene Modelle für Graphen. Im allgemeinsten Fall besteht ein Graph  $G = (V, E, s, t)$  aus einer Menge von *Knoten*  $V$  (engl: *vertex*), einer Menge von *Kanten*  $E$  (engl: *edge*) und zwei Abbildungen  $s, t : E \rightarrow V$ . Die Abbildung  $s$  ordnet jeder Kante aus  $E$  einen Startknoten (engl: *source*) zu, und die Abbildung  $t$  gibt den Zielknoten (engl: *target*) an. Zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, heißen *adjazent* (oder *benachbart*). Eine Kante  $e \in E$  lässt sich graphisch durch einen Pfeil  $s(e) \rightarrow t(e)$  veranschaulichen. Dieses Modell erlaubt mehrere Kanten zwischen zwei Knoten – sogenannte *Mehrfachkanten*. Zudem sind auch Kanten von einem Knoten zu sich selbst möglich; solche Kanten nennt man *Schlingen*.



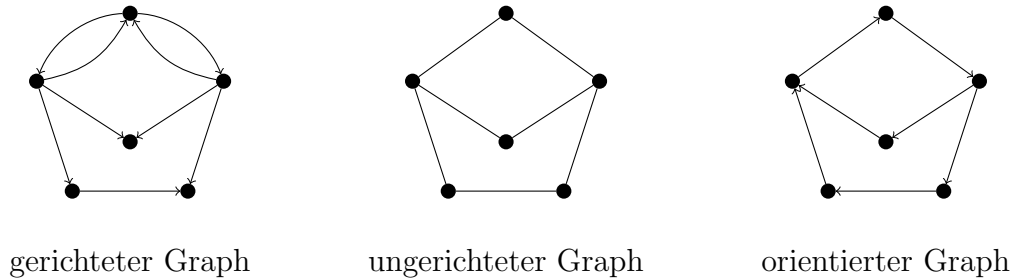
Mehrfachkanten



Schlingen

Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten bezeichnet man als *einfach* oder auch als *schlicht*. In vielen Anwendungen kann man Schlingen und Mehrfachkanten durch Einführen von weiteren Knoten vermeiden. Eine Kante  $x \rightarrow y$  kann man beispielsweise durch  $x \rightarrow z \rightarrow y$  ersetzen, wobei  $z$  ein neuer Knoten ist. Für einfache Graphen existieren auch einfachere Beschreibungsmodelle. Im Folgenden seien alle Graphen stets einfach. Ein *gerichteter* Graph ist ein Paar  $(V, E)$ , wobei  $V$  eine beliebige Menge ist und  $E \subseteq V \times V$ . Jedes Paar  $(x, y) \in E$  stellt eine Kante vom Knoten  $x$  zum Knoten  $y$  dar. Hierbei ist  $x$  der Startknoten und  $y$  der Zielknoten. Falls wir nicht zwischen Startknoten und Zielknoten unterscheiden, erhalten wir *ungerichtete* Graphen. Bei ungerichteten Graphen verbindet jede Kante zwei Knoten, ohne dabei zwischen diesen beiden Knoten einen Unterschied zu machen. Als Modelle für ungerichtete Graphen ergeben sich Paare  $(V, E)$  mit einer Knotenmenge  $V$  und  $E \subseteq \binom{V}{2}$ , d.h. die Kanten bestehen aus zwei-elementigen Teilmengen  $\{x, y\}$  mit  $x, y \in V$ . Alternativ könnte man bei gerichteten Graphen zusätzlich fordern, dass  $(x, y) \in E$  genau dann gilt, wenn  $(y, x) \in E$  ist. Damit entsprechen Kanten bei ungerichteten Graphen einer symmetrischen Relation. Sowohl bei gerichteten als auch bei ungerichteten Graphen benutzen wir die Schreibweise  $xy \in E$  für Kanten. Man kann jedem gerichteten Graphen einen ungerichteten Graphen zuordnen, indem man die Orientierung der Kanten vergisst. Umgekehrt kann man jeden ungerichteten Graphen orientieren, indem man für jede

ungerichtete Kante  $\{x, y\}$  eine Richtung festlegt:  $(x, y)$  oder  $(y, x)$ . Die *Orientierung* eines ungerichteten Graphen ist nicht eindeutig. Bei orientierten Graphen ist höchstens eine der beiden Kanten  $(x, y)$  und  $(y, x)$  in  $E$  enthalten.



Ein Graph ist *endlich*, falls er nur endlich viele Knoten besitzt. Wenn nicht anders angegeben, meinen wir im Folgenden mit „Graph“ stets einen endlichen, ungerichteten Graph ohne Schlingen und Mehrfachkanten. Häufig interpretieren wir auch in solchen Graphen die Kanten als Paare  $E \subseteq V \times V$ . Beispielsweise meinen wir mit  $E \subseteq A \times B$ , dass jede Kante aus einem Knoten aus  $A$  und einem Knoten aus  $B$  besteht, ohne dabei eine Orientierung anzunehmen. Dies vereinfacht an vielen Stellen die Notation. Ein *Untergraph* (oder *Teilgraph*)  $G' = (V', E')$  des Graphen  $G = (V, E)$  ist ein Graph mit  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$ ; in diesem Fall sagen wir auch, dass  $G$  den Graphen  $G'$  *enthält*. Ein *induzierter Untergraph* (oder *induzierter Teilgraph*)  $G' = (V', E')$  des Graphen  $G = (V, E)$  ist ein Untergraph, für den gilt  $E' = \binom{V'}{2} \cap E$ , d.h. in  $G'$  sind alle Kanten aus  $G$  enthalten, welche Knoten aus  $V'$  verbinden. Ein induzierter Untergraph ist bereits durch eine Teilmenge der Knoten eindeutig spezifiziert, und wir schreiben  $G[V']$  für den durch die Knotenmenge  $V' \subseteq V$  beschriebenen induzierten Untergraphen von  $G$ , d.h.  $G[V'] = (V', \binom{V'}{2} \cap E)$ . Ein häufig verwendete Operation auf Graphen ist das Entfernen von Knoten  $X \subseteq V$ ; als abkürzende Schreibweise benutzen wir deshalb  $G - X$  für den Graphen  $G[V \setminus X]$ . Falls  $X = \{x\}$ , dann lassen wir in der Regel die Mengenklammern weg und schreiben  $G - x$ .

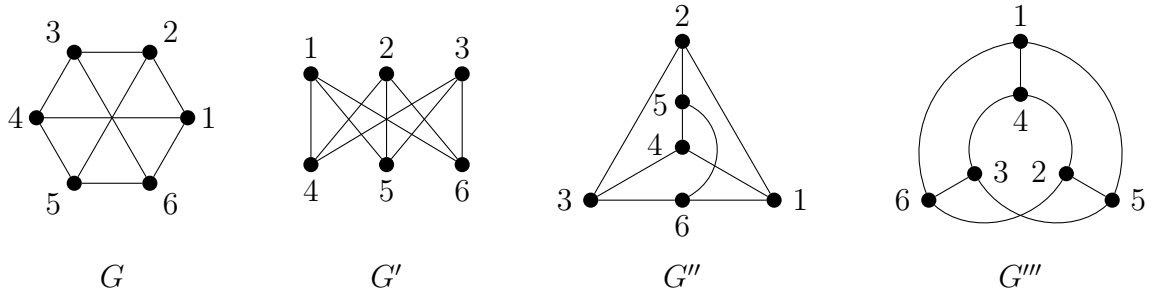
Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine Folge von Knoten  $x_0 x_1 \cdots x_n$  ist ein *Weg* (oder ein *Pfad* oder ein *Kantenzug*), falls je zwei aufeinander folgende Knoten durch eine Kante verbunden sind, d.h. für alle  $0 \leq i < n$  gilt  $x_i x_{i+1} \in E$ . Wir nennen  $n$  die Länge des Wegs; es ist die Anzahl der Kanten. Ein Weg  $x_0 \cdots x_n$  ist *einfach*, falls die Knoten  $x_0, \dots, x_n$  paarweise verschieden sind. Der Knoten  $x_0$  ist der *Startpunkt* des Wegs und  $x_n$  sein *Endpunkt*. Falls bei einem Pfad der Länge  $\geq 3$  der Startpunkt und der Endpunkt identisch sind, so sprechen wir von einem *Kreis*. Ein Kreis  $x_0 \cdots x_{n-1} x_0$  ist *einfach*, falls die Knoten  $x_0, \dots, x_{n-1}$  paarweise verschieden sind. Der Graph  $G$  heißt *zusammenhängend*, falls je zwei Knoten durch einen Weg verbunden sind. Eine *Zusammenhangskomponente* eines Graphen ist eine maximale Teilmenge von Knoten, welche paarweise durch einen Weg verbunden sind. Die *Distanz* (oder der *Abstand*) zwischen zwei Knoten  $x$  und  $y$  ist die Länge eines kürzesten Weges mit Startpunkt  $x$  und Endpunkt  $y$ . Falls  $x$  und  $y$  in verschiedenen Zusammenhangskomponenten liegen, ist ihre Distanz unendlich.

Häufig ist man nicht an der exakten Struktur eines Graphen interessiert, sondern nur an seinem „Aussehen“. Die Namen der Knoten spielen in vielen Fällen eine untergeordnete Rolle. Dies führt auf den Begriff des Isomorphie. Zwei Graphen  $G = (V, E)$

und  $G' = (V', E')$  sind *isomorph*, falls eine bijektive Abbildung  $\varphi : V \rightarrow V'$  existiert mit

$$xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$$

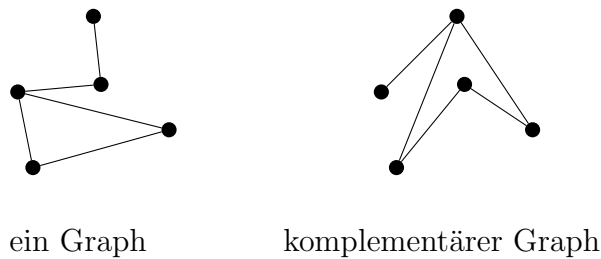
Isomorphie von Graphen bedeutet also, dass die Graphen durch Umbenennung der Knoten in einander überführt werden können. Die folgenden vier Graphen über der Knotenmenge  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  sind isomorph:



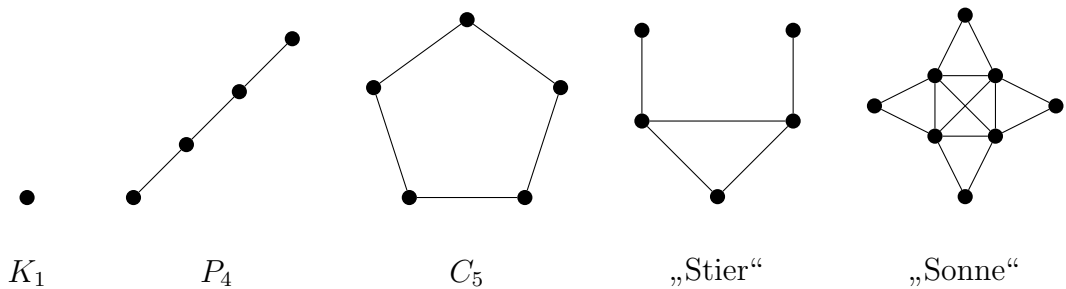
Ein möglicher Isomorphismus von  $G$  nach  $G'$  ist gegeben durch  $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 5, 5 \mapsto 3$  und  $6 \mapsto 6$ . Ein nicht-trivialer Isomorphismus von  $G$  auf sich selbst ist die Drehung gegen den Uhrzeigersinn  $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 5, 5 \mapsto 6, 6 \mapsto 1$ . Die Komposition dieser beiden Isomorphismen  $G \rightarrow G$  und  $G \rightarrow G'$  liefert einen weiteren Isomorphismus  $G \rightarrow G'$ . Die Identität auf  $\{1, \dots, 6\}$  definiert sowohl einen Isomorphismus  $G \rightarrow G''$  als auch einen Isomorphismus  $G' \rightarrow G'''$ .

Im Allgemeinen betrachten wir isomorphe Graphen als gleich; z.B. wir schreiben  $G = H$ , falls  $G$  und  $H$  isomorph sind, oder wir sagen  $H$  ist ein Untergraph von  $G$ , wenn  $H$  isomorph ist zu einem Untergraphen von  $G$ .

Der *komplementäre* Graph von  $G = (V, E)$  ist  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  mit  $\bar{E} = \binom{V}{2} \setminus E$ . Der komplementäre Graph  $\bar{G}$  von  $G$  enthält also genau die Kanten, welche  $G$  nicht hat.

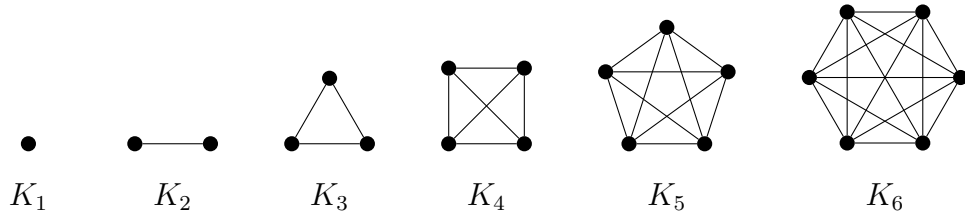


Ein Graph  $G$  heißt *selbstkomplementär*, falls  $G$  und sein komplementärer Graph  $\bar{G}$  isomorph sind. Im Folgenden geben wir einige Beispiele selbstkomplementärer Graphen an:

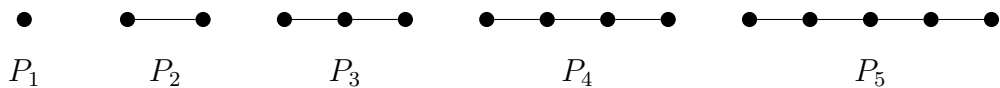


## 2.2 Einige spezielle Graphen

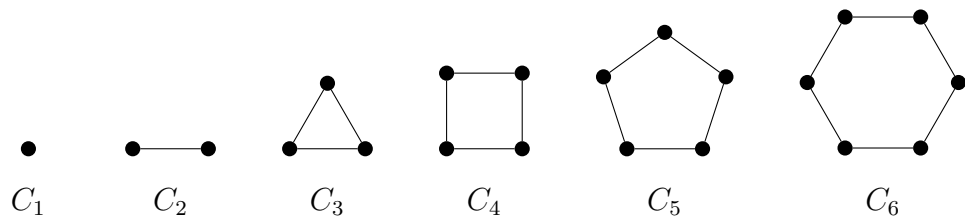
Wir wollen nun die Namen einiger spezieller Graphen vereinbaren. Sei hierzu  $V_n = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Menge mit  $n$  Elementen. Der *vollständige* Graph mit  $n$  Knoten ist  $K_n = (V_n, \binom{V_n}{2})$ , d.h. der Graph  $K_n$  enthält alle möglichen Kanten. Der Graph  $K_n$  hat genau  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  viele Kanten. Dies ist die Maximalzahl an Kanten, die ein ungerichteter Graph ohne Schlingen und Mehrfachkanten haben kann. Insbesondere ist die Anzahl der Kanten jedes Graphen mit  $n$  Knoten in  $\mathcal{O}(n^2)$ .



Der *leere* Graph mit  $n$  Knoten ist  $E_n = (V_n, \emptyset)$ . Er enthält keine Kanten und ist der komplementäre Graph des  $K_n$ . Mit  $P_n$  bezeichnen wir den Graphen, der genau aus einem einfachen Pfad der Länge  $n - 1$  besteht, d.h.  $P_n = (V_n, \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i < n\})$ . Der Graph  $P_n$  enthält  $n - 1$  Kanten.



Der Graph  $C_n$  ist der einfache Kreis mit  $n$  Knoten. Man erhält den Graph  $C_n$ , indem man bei einem  $P_n$  den ersten mit dem letzten Knoten verbindet, d.h.  $C_n = (V_n, \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{v_n v_1\})$ . Für  $n \geq 3$  besitzt der Graph  $C_n$  genau  $n$  Kanten.



## 2.3 Der Grad eines Knotens

Die naheliegendste Maßzahl eines Knotens  $x$  ist die Anzahl der inzidenten Kanten. Wir nennen dies den *Knotengrad* (oder kurz: den *Grad*)  $d_x$  von  $x$ , d.h.  $d_x = |\{e \in E \mid x \in e\}|$  für einen Graphen  $(V, E)$  und seinen Knoten  $x \in V$ . Eine erste Beobachtung liefert der folgende Satz für Graphen  $G = (V, E)$ .

### Satz 2.1

$$\sum_{x \in V} d_x = 2|E|$$

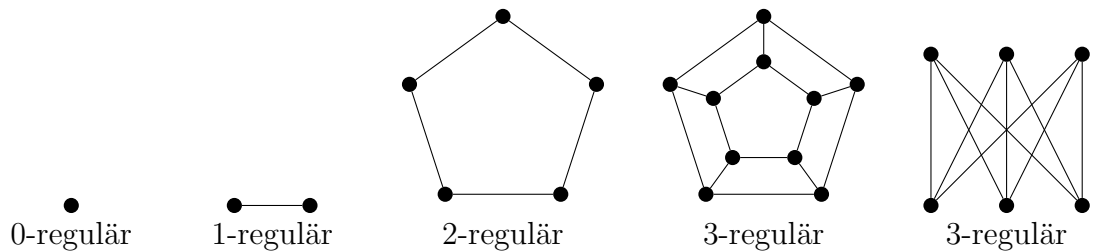


*Beweis:* Wir zählen die Anzahl der *Kantenenden* auf zwei verschiedene Arten. Jede Kante verbindet zwei Knoten und besitzt deshalb zwei Enden. Dies entspricht der rechten Seite. Andererseits lässt sich jedes Kantenende eindeutig einem Knoten zuordnen; auf diese Weise werden die Kantenenden auf der linken Seite gezählt.  $\square$

Aus Satz 2.1 folgt, dass die Summe der Knotengrade eine gerade Zahl ist. Dies erklärt das folgende Korollar.

**Korollar 2.2** *Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist gerade.*

Wenn alle Knoten eines Graphen den Grad  $k$  haben, dann nennen wir diesen Graph  $k$ -regulär. Aus obigem Satz 2.1 ergibt sich die Formel  $k|V| = 2|E|$  für  $k$ -reguläre Graphen. Der vollständige Graph  $K_n$  ist  $(n-1)$ -regulär. Ein Graph  $G$  heißt *regulär*, falls es ein  $k$  gibt, für welches  $G$  ein  $k$ -regulärer Graph ist.



# 3 Eulergraphen

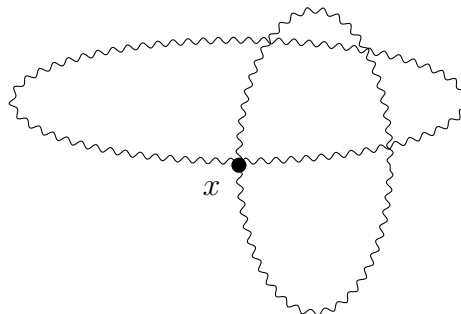
Ein *Eulerkreis* eines Graphen  $G = (V, E)$  ist ein Kreis, welcher jede Kante aus  $E$  genau einmal enthält. Graphen, die einen Eulerkreis besitzen, nennt man häufig *Eulergraphen* oder *eulersch*. Interessanterweise lässt sich an den Graden der Knoten ablesen, ob ein zusammenhängender Graph eulersch ist.

**Satz 3.1** *Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn alle Knoten geraden Grad haben.*

*Beweis:* Jedem Vorkommen eines Knotens auf einem Kreis lassen sich zwei Kanten zuordnen: die Kante, mit der man den Knoten betritt, und die Kante, mit der man den Knoten wieder verlässt. Wenn  $G$  einen Eulerkreis besitzt, und ein Knoten  $x$  genau  $k$ -mal auf diesem Kreis vorkommt, dann gilt  $d_x = 2k$ . Also hat jeder Knoten geraden Grad.

Sei nun  $G$  ein Graph, bei dem jeder Knoten geraden Grad hat. Wir beginnen bei einem beliebigen Knoten  $x$  und gehen zu einem Nachbarn  $y$  von  $x$ . Die dabei verwendete Kante  $xy$  wird entfernt. Wir wiederholen dies von dem erreichten Knoten aus, solange es Nachbarn gibt. Wir enden wieder bei  $x$ , da von jedem anderen Knoten aus immer – außer der Kante, mit der wir den Knoten betreten haben – auch noch eine Kante existiert, über die wir den Knoten wieder verlassen können.

Wir können dies bei jedem Knoten wiederholen, der noch Nachbarn hat, so dass wir eine Menge von Kanten-disjunkten Kreisen erhalten, wobei jede Kante auf mindestens einem Kreis liegt. Da der Graph zusammenhängend ist, lässt sich daraus ein Eulerkreis zusammensetzen.



Zwei Kreise  $(x, y_1, \dots, y_s, x)$  und  $(x, z_1, \dots, z_t, x)$  mit mindestens einem gemeinsamen Knoten  $x$  können verschmolzen werden zu  $(x, y_1, \dots, y_s, x, z_1, \dots, z_t, x)$ .  $\square$

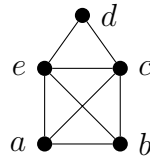
### 3 Eulergraphen

Ein *Eulerweg* ist ein Weg, der jede Kante genau einmal enthält. Aus vorigem Satz 3.1 können wir folgende Charakterisierung von Graphen mit Eulerwegen ableiten.

**Korollar 3.2** Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph und seien  $x_0 \neq x_\ell$  zwei Knoten von  $G$ . Dann besitzt  $G$  genau dann einen Eulerweg  $x_0 \cdots x_\ell$ , wenn  $x_0$  und  $x_\ell$  die einzigen Knoten mit ungeradem Grad sind.

*Beweis:* Sei  $y$  ein neuer Knoten und sei  $G' = (V \cup \{y\}, E \cup \{yx_0, yx_\ell\})$ . Wenn  $x_0 \cdots x_\ell$  ein Eulerweg von  $G$  ist, dann ist  $x_0 \cdots x_\ell y x_0$  ein Eulerkreis von  $G'$ . Umgekehrt liefert jeder Eulerkreis von  $G'$  durch Entfernen des Knotens  $y$  einen Eulerweg  $x_0 \cdots x_\ell$  in  $G$ . Also besitzt  $G$  genau dann einen Eulerpfad  $x_0 \cdots x_\ell$ , wenn  $G'$  einen Eulerkreis besitzt. Nach Satz 3.1 ist dies genau dann der Fall, wenn alle Knoten in  $G'$  geraden Grad haben. Nach Konstruktion von  $G'$  ist dies äquivalent dazu, dass  $x_0$  und  $x_\ell$  die einzigen Knoten in  $G$  mit ungeradem Grad sind.  $\square$

Als „Haus vom Nikolaus“ wird der folgende Graph bezeichnet:



Ein beliebtes Kinderspiel ist es, die Kanten des Graphen zu zeichnen, ohne den Bleistift abzusetzen und ohne Kanten mehrfach zu zeichnen. In unserer Terminologie entspricht dies einem Eulerkreis oder einem Eulerpfad. Da nicht alle Knoten geraden Grad haben, existiert nach Satz 3.1 kein Eulerkreis. Da aber nur die Knoten  $a$  und  $b$  ungeraden Grad haben, existiert nach Korollar 3.2 ein Eulerweg von  $a$  nach  $b$ . Ein solcher Eulerweg ist beispielsweise  $abcdcaeb$ . Tatsächlich kann man das „Haus vom Nikolaus“ auf 88 verschiedene Arten zeichnen. Eulerwege mit einer anderen Menge von Start- und Endknoten als  $\{a, b\}$  gibt es nicht.

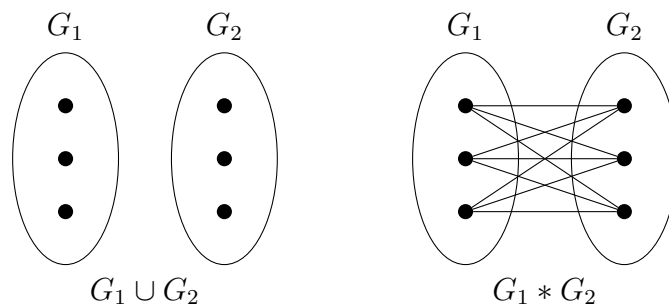
# 4 Cographen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einigen grundlegenden Konzepten der Graphentheorie näher vertraut machen. Als „Anschauungsmaterial“ hierfür dienen uns Cographen. Wir benötigen hierfür noch zwei Graphoperationen. Die *Vereinigung*  $G_1 \cup G_2$  und das *Produkt*  $G_1 * G_2$  zweier Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  sind definiert durch

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$$

$$G_1 * G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup V_1 \times V_2)$$

Wir nehmen hierbei stets an, dass die Knoten der beiden Graphen unterschiedliche Namen haben, d.h.  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Bei der Vereinigung zeichnen wir die beiden Graphen einfach nebeneinander und fassen das Ergebnis als einen neuen Graphen auf, während wir bei dem Produkt zusätzlich jeden Knoten des einen Graphen mit jedem Knoten des anderen Graphen verbinden. Diese zusätzlichen (ungerichteten) Kanten sind oben mit dem Ausdruck  $V_1 \times V_2$  beschrieben.



*Cographen* sind wie folgt induktiv definiert:

- Der Graph  $K_1$  bestehend aus nur einem Knoten ist ein Cograph.
- Wenn  $G_1$  und  $G_2$  Cographen sind, dann ist auch  $G_1 \cup G_2$  ein Cograph.
- Wenn  $G$  ein Cograph ist, dann ist auch  $\overline{G}$  ein Cograph.

Die letzte Regel für Komplementgraphen könnten wir auch durch die Folgende ersetzen:

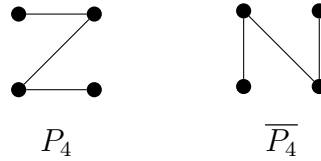
- Wenn  $G_1$  und  $G_2$  Cographen sind, dann ist auch  $G_1 * G_2$  ein Cograph.

Dies würde die gleiche Klasse von Graphen beschreiben, denn es gilt  $\overline{G_1 \cup G_2} = \overline{G_1} * \overline{G_2}$  und  $\overline{K_1} = K_1$ , so dass wir den Komplementierungs-Operator eliminieren können.

Seien  $G$  und  $H$  Graphen. Wir sagen  $G$  ist  $H$ -frei, falls  $H$  kein induzierter Untergraph von  $G$  ist (oder genauer: wenn  $H$  nicht isomorph zu einem induzierten Untergraphen von  $G$  ist). Wir können nun die folgende Charakterisierung für Cographen formulieren.

**Satz 4.1** *Ein Graph ist genau dann ein Cograph, wenn er  $P_4$ -frei ist.*

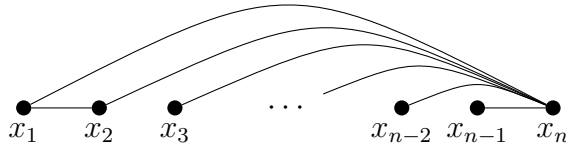
*Beweis:* „ $\Rightarrow$ “: Die Implikation von links nach rechts ergibt sich durch strukturelle Induktion:  $K_1$  ist  $P_4$ -frei; wenn  $G_1$  und  $G_2$  beide keinen induzierten  $P_4$  enthalten, dann gilt dies auch für  $G_1 \cup G_2$ ; und wenn  $G$  ein  $P_4$ -freier Graph ist, dann ist es auch  $\overline{G}$ , da  $P_4$  selbstkomplementär ist.



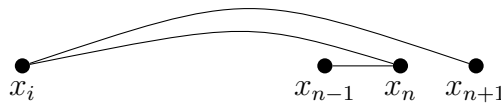
„ $\Leftarrow$ “: Sei  $G$  ein  $P_4$ -freier Graph mit  $|V| \geq 2$ . Um zu zeigen, dass  $G$  ein Cograph ist, genügt zu beweisen, dass  $G$  oder  $\overline{G}$  nicht zusammenhängend sind. Nehmen wir also an, dass  $G$  und  $\overline{G}$  beide zusammenhängend sind. Wir zeigen unter dieser Annahme, dass  $G$  unendlich ist. Induktiv konstruieren wir eine Sequenz von Knoten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  für  $n \geq 2$  mit

$$\begin{aligned} (x_i, x_{2k}) &\in E && \text{für alle } 1 \leq i < 2k \leq n \\ (x_i, x_{2k+1}) &\notin E && \text{für alle } 1 \leq i < 2k + 1 \leq n \end{aligned} \tag{4.1}$$

Da  $G$  zusammenhängend ist und  $|V| \geq 2$ , existieren zwei Knoten  $(x_1, x_2) \in E$ , und diese Knoten erfüllen die Bedingung (4.1). Sei nun  $x_1, x_2, \dots, x_n$  eine beliebige Sequenz von Knoten, welche (4.1) erfüllt. Ohne Einschränkung sei  $n$  gerade (bei ungeradem  $n$  vertauschen wir die Rollen von  $G$  und  $\overline{G}$ ).



Es gilt  $(x_{n-1}, x_n) \in E$ . Da  $\overline{G}$  zusammenhängend ist, existiert ein einfacher Weg  $x_{n-1}y_1 \dots y_j x_n$  minimaler Länge in  $\overline{G}$ . Es gilt  $j \geq 1$ , weil  $(x_{n-1}, x_n) \notin \overline{E}$ . Wenn  $j > 1$  wäre, dann würden die ersten 4 Knoten von  $x_{n-1}y_1 \dots y_j x_n$  wegen der Minimalität einen  $P_4$  bilden. Da aber  $\overline{G}$  keinen induzierten  $P_4$  enthält, ist  $j = 1$ . Wir setzen  $x_{n+1} = y_1$ . Es gilt  $x_{n+1} \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ , da  $x_n$  mit allen anderen Knoten  $x_i$ ,  $1 \leq i < n$ , in  $G$  durch eine Kante verbunden ist, aber  $x_n$  ist nach Konstruktion nicht mit  $x_{n+1}$  verbunden. Angenommen,  $(x_i, x_{n+1}) \in E$  für  $1 \leq i < n - 1$ .

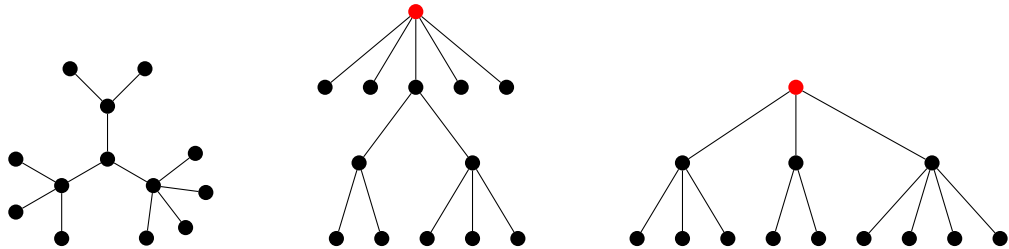


Dann wäre  $x_{n-1}, x_n, x_i, x_{n+1}$  ein induzierter  $P_4$ . Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Es gilt also  $(x_i, x_{n+1}) \notin E$  für alle  $1 \leq i < n + 1$ . Die Folge  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$  erfüllt damit (4.1). Dies zeigt, dass die Anzahl der Knoten in  $G$  nicht beschränkt ist. Da  $G$  endlich ist, ist dies ein Widerspruch. Es folgt, dass  $G$  oder  $\overline{G}$  nicht zusammenhängend ist. Ohne Einschränkung sei  $\overline{G}$  nicht zusammenhängend, d.h.  $\overline{G} = G_1 \cup G_2$  mit  $P_4$ -freien Graphen  $G_1$  und  $G_2$ . Mit Induktion über die Anzahl der Knoten sind  $G_1$  und  $G_2$  Cographen, und damit ist auch  $G = \overline{G_1 \cup G_2}$  ein Cograph. Im Fall, dass  $G$  nicht zusammenhängend ist, benötigt man keine Komplementbildung.  $\square$

Als kleine Folgerung aus dem obigen Satz sehen wir, dass jeder selbstkomplementäre Graph mit 4 oder mehr Knoten einen induzierten  $P_4$  enthält: Es ist leicht zu sehen, dass stets mindestens einer der Graphen  $G$  und  $\overline{G}$  zusammenhängend ist. Wenn  $G = \overline{G}$  gilt, ist also sowohl  $G$  als auch  $\overline{G}$  zusammenhängend. Insbesondere ist  $G$  kein Cograph. Nach obigem Satz 4.1 enthält  $G$  einen induzierten  $P_4$ .

# 5 Bäume

Eine *Baum* ist ein nichtleerer zusammenhängender Graph ohne einfache Kreise. Ein Knoten eines Baums ist ein *Blatt*, falls er höchstens den Grad 1 hat; Knoten, die keine Blätter sind, nennt man *innere Knoten*. In manchen Fällen zeichnet man einen Knoten eines Baums aus und nennt ihn *Wurzel*. Man spricht auch von *gewurzelten* Bäumen. Die Idee ist, dass die Wurzel der Stelle entspricht, an der der Baum beginnt. Im folgenden Bild sehen wir drei Darstellungen des gleichen Baums. Bei den beiden Repräsentationen rechts ist eine Wahl der Wurzel dadurch angedeutet, dass sie jeweils der oberste Knoten ist.



Der folgende Satz fasst einige Eigenschaften von (nicht gewurzelten) Bäumen zusammen:

**Satz 5.1** Sei  $G = (V, E)$  ein nichtleerer Graph. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

- (a)  $G$  ist ein Baum.
- (b) Zwischen je zwei Knoten aus  $V$  gibt es genau einen einfachen Weg in  $G$ .
- (c)  $G$  enthält keine einfachen Kreise und  $|E| = |V| - 1$ .
- (d)  $G$  ist zusammenhängend und  $|E| = |V| - 1$ .
- (e)  $G$  ist zusammenhängend, aber durch Entfernen einer beliebigen Kante aus  $E$  wird der Graph unzusammenhängend.
- (f)  $G$  enthält keine einfachen Kreise, aber durch Hinzufügen einer beliebigen neuen Kante entsteht ein Kreis.

*Beweis:* (a)  $\Rightarrow$  (b): Angenommen, zwei Knoten  $x, y \in V$  sind durch zwei verschiedene Pfade  $xv_1 \cdots v_m y$  und  $xw_1 \cdots w_n y$  verbunden. Wir wählen die Knoten  $x$  und  $y$  so, dass  $m+n$  minimal ist. Aus dieser Minimalitätsannahme folgt  $\{v_1, \dots, v_m\} \cap \{w_1, \dots, w_n\} = \emptyset$ . Daher ist  $xv_1 \cdots v_m y w_n \cdots w_1 x$  ein einfacher Kreis. Dies ist ein Widerspruch, denn  $G$  ist ein Baum. Dies zeigt, dass zwischen je zwei Knoten höchstens ein Weg existiert. Da  $G$  zusammenhängend ist, existiert auch mindestens ein Weg.

(b)  $\Rightarrow$  (c): Die Knoten auf einem Kreis wären durch mindestens 2 einfache Wege verbunden. Also enthält  $G$  keine einfachen Kreise. Für jeden Knoten gibt es genau eine ausgehende Kante, die zur Wurzel führt; und jede Kante erfüllt diese Aufgabe für irgend einen Knoten. Es gibt  $|V| - 1$  Knoten, welche nicht die Wurzel sind. Dies ist nach der Vorüberlegung auch die Anzahl der Kanten. Im Folgenden ist diese Idee genauer beschrieben.

Wir wählen einen beliebigen Knoten  $r \in V$  zur Wurzel (engl. *root*) und ordnen jedem Knoten  $x \in V \setminus \{r\}$  die erste Kante  $e_x = xv_1 \in E$  zu, die auf dem eindeutigen Weg  $xv_1 \cdots v_{m-1} r$  von  $x$  zur Wurzel liegt. Weiter definieren wir die Höhe  $h(x)$  von  $x$  als die Länge des Wegs von  $x$  zu  $r$ , d.h.  $h(x) = m$ . Falls  $y \neq x$  auf dem Weg von  $x$  zur Wurzel liegt, dann gilt  $h(y) < h(x)$ . Angenommen, es gilt  $e_x = e_y$  für Knoten  $x \neq y$ . Seien  $p = xv_1 \cdots v_{m-1} r$  und  $q = yw_1 \cdots w_{n-1} r$  zwei einfache Wege in  $G$ . Dann gilt  $v_1 = y$  und  $w_1 = x$ . Es folgt  $h(x) < h(y)$  und  $h(y) < h(x)$ . Dies ist ein Widerspruch; also gilt  $e_x \neq e_y$  für  $x \neq y$ . Nun gilt für  $E_V = \{e_x \in E \mid x \in V \setminus \{r\}\}$ , dass  $|E_V| = |V \setminus \{r\}| = |V| - 1$ . Angenommen, es existiert eine Kante  $xy \in E \setminus E_V$ . Ohne Einschränkung sei  $h(y) \leq h(x)$ . Falls  $y$  auf dem Weg von  $x$  zur Wurzel liegt, dann folgt aus  $e_x \neq xy$ , dass  $h(y) \leq h(x) - 2$  gilt. Nun liefert der Weg mit der Kante  $xy$  über den Knoten  $y$  einen neuen und kürzeren einfachen Weg von  $x$  zur Wurzel – im Widerspruch zu (b). Wenn  $y$  nicht auf dem Weg von  $x$  zur Wurzel liegt, dann erhalten wir zwei verschiedene einfache Wege von  $x$  zur Wurzel: der eine benutzt die Kante  $xy$  und den Knoten  $y$ , der andere nicht. Dies ist auch wieder ein Widerspruch zu (b). Also gilt  $E = E_V$  und damit  $|E| = |V| - 1$ .

(c)  $\Rightarrow$  (d): Seien  $C_1, \dots, C_k$  die Zusammenhangskomponenten von  $G$ . Jede Zusammenhangskomponente von  $G$  ist ein Baum. Sei  $n_i$  die Anzahl der Knoten in Komponente  $C_i$  und  $e_i$  die Anzahl der Kanten. Wir haben bereits gezeigt, dass (c) aus (a) folgt; insbesondere gilt für jede Komponente, dass  $e_i = n_i - 1$ . Es folgt  $|E| = \sum_{i=1}^k e_i = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = |V| - k$ . Aus der Voraussetzung in (c) erhalten wir  $k = 1$ , d.h.  $G$  besitzt nur eine Zusammenhangskomponente und ist damit zusammenhängend.

(d)  $\Rightarrow$  (e): Sei  $e \in E$ . Der Graph  $G' = (V, E \setminus \{e\})$  hat nur  $|V| - 2$  Kanten, aber  $|V| - 2$  Kanten können höchstens  $|V| - 1$  Knoten mit einander verbinden. Also ist  $G'$  unzusammenhängend.

(e)  $\Rightarrow$  (f): Wenn  $G$  einen einfachen Kreis enthalten würde, dann könnten wir jede beliebige Kante auf diesem Kreis entfernen, und der entstandene Graph wäre immer noch zusammenhängend. Dies ist ein Widerspruch zu (e). Also enthält  $G$  keine einfachen Kreise. Sei  $xy \in \binom{V}{2} \setminus E$  und sei  $G' = (V, E \cup \{xy\})$ . Da  $G$  zusammenhängend ist, existiert ein einfacher Weg  $xv_1 \cdots v_m y$ . Dies ergibt in  $G'$  den Kreis  $xv_1 \cdots v_m y x$ .

(f)  $\Rightarrow$  (a): Seien  $C_1$  und  $C_2$  zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten von  $G$ . Wir können zwischen den beiden Komponenten eine beliebige Kante hinzufügen, ohne dass ein Kreis entsteht. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung; also besitzt  $G$  nur eine Zusammenhangskomponente.  $\square$



Wenn wir mit einem beliebigen zusammenhängenden Graphen starten, können wir nach Satz 5.1 (e) so lange Kanten entfernen, bis wir einen Baum erhalten. Dies führt zu dem Begriff des Spannbaums. Ein *Spannbaum* ist ein Untergraph, welcher ein Baum ist und alle Knoten des ursprünglichen Graphen enthält. Das Entfernen von „überflüssigen“ Kanten liefert uns das folgende Korollar.

**Korollar 5.2** *Jeder nichtleere zusammenhängende Graph besitzt einen Spannbaum.*

Spannbäume sind ein einfaches aber sehr vielseitiges Hilfsmittel in der Graphentheorie. Wir betrachten hierzu das folgende Beispiel: Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph mit  $n$  Knoten. Ein Durchlauf eines Spannbaums von  $G$  mittels Tiefensuche zeigt, dass  $G$  einen (nicht einfachen) Kreis der Länge  $2(n-1)$  besitzt, welcher jeden Knoten mindestens einmal besucht.

Natürlich lässt sich das Konzept der Spannbäume auch auf nicht zusammenhängende Graphen verallgemeinern, indem man die Zusammenhangskomponenten einzeln betrachtet.

Ein weiteres einfaches Korollar aus Satz 5.1 belegt die gewählten Begriffsbildungen.

**Korollar 5.3** *Jeder Baum besitzt Blätter.*

*Beweis:* Angenommen, jeder Knoten des Baums  $G = (V, E)$  hätte mindestens den Grad 2. Aus Satz 2.1 folgt  $|E| \geq |V|$ . Dies ist ein Widerspruch zu Satz 5.1 (d). Also besitzt  $G$  mindestens ein Blatt.  $\square$

Tatsächlich folgt aus Korollar 5.3, dass jeder Baum mit mindestens zwei Knoten auch mindestens zwei Blätter besitzt. Die Beweistechnik ist typisch: Man pflückt die Blätter. Für zwei Knoten gilt die Behauptung. Bei einem Baum mit mehr als zwei Knoten können wir ein Blatt  $x$  entfernen („pflücken“). Dieses Blatt existiert nach Korollar 5.3. Der entstandene Baum besitzt nach Induktionsvoraussetzung zwei Blätter  $y, z$ . Da  $x$  nur mit einem Knoten verbunden war, ist  $y$  oder  $z$  auch ein Blatt im ursprünglichen Baum. Zusammen mit  $x$  sind dies zwei Blätter.

Für alle  $n \geq 2$  ist der Pfad  $P_n$  ein Beispiel eines Baums mit  $n$  Knoten und genau zwei Blättern.

Ein *Wald* ist ein Graph, bei dem jede Zusammenhangskomponente ein Baum ist.

**Satz 5.4**  $G$  ist ein Wald  $\Leftrightarrow e = n - z$ .

*Beweis:* „ $\Rightarrow$ “: Jede Zusammenhangskomponente  $C$  ist ein Baum und erfüllt daher  $e_C = n_C - 1$ . Insgesamt gilt

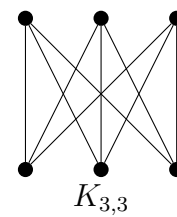
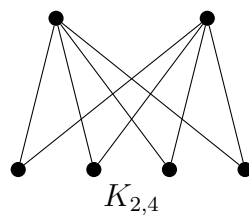
$$\begin{aligned} \sum_C e_C &= \sum_C n_C - \sum_C 1 \\ e &= n - z \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Gibt es eine Komponente  $C_1$  mit  $e_1 > n_1 - 1$ , dann muss auch ein  $C_2$  existieren mit  $e_2 < n_2 - 1$  und umgekehrt. Solch eine Komponente kann es aber nicht geben, denn  $C_2$  wäre nicht zusammenhängend. Für jede Komponente  $C$  gilt also  $e_C = n_C - 1$ , also ist  $C$  ein Baum und  $G$  ein Wald.  $\square$

# 6 Bipartite Graphen

**Definition 6.1 (bipartit)**  $G$  ist bipartit, falls  $V = A \dot{\cup} B$  und  $E \subseteq A \times B$ .  $K_{m,n}$  ist ein vollständiger bipartiter Graph mit  $|A| = m$ ,  $|B| = n$  und  $E = A \times B$ .

## Beispiele 6.2



◇

# 7 Der Satz von Menger

Der Satz von Menger (Karl Menger, 1902–1985) stellt einen Zusammenhang her zwischen einem Parameter, der maximiert wird, und einem Parameter, der minimiert wird. Derartige Aussagen sind typisch für die Graphentheorie. Genauer geht es bei dem einen Parameter um die minimale Anzahl von Knoten, die man braucht, um zwei (nicht notwendigerweise disjunkte) Knotenmengen  $A$  und  $B$  zu trennen. Der andere Parameter ist die maximale Anzahl von disjunkten Pfaden von  $A$  nach  $B$ . Der Satz von Menger besagt, dass diese beiden Parameter übereinstimmen.

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $A, B \subseteq V$ . Ein  $AB$ -Pfad ist ein Pfad  $x_0 \cdots x_n$  mit  $x_0 \in A$  und  $x_n \in B$ ; desweiteren gilt für die inneren Knoten  $x_1, \dots, x_{n-1}$ , dass  $\{x_1, \dots, x_{n-1}\} \cap (A \cup B) = \emptyset$ . Bei einem  $AB$ -Pfad ist  $x_0 = x_n \in A \cap B$  möglich. Ein  $AB$ -Trenner ist eine Teilmenge  $C \subseteq V$  so, dass jeder  $AB$ -Pfad einen Knoten auf  $C$  hat.

**Satz 7.1 (Menger)** *Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $A, B \subseteq V$ . Dann ist die Größe  $k$  eines kleinsten  $AB$ -Trenners gleich der maximalen Anzahl von paarweise disjunkten  $AB$ -Pfadern.*

*Beweis:* Für den Beweis verwenden wir gerichtete Graphen, d.h., es gilt  $E \subseteq V \times V$ . Bei Pfaden  $x_0 \cdots x_n$  in gerichteten Graphen fordern wir, dass  $(x_i, x_{i+1}) \in E$  gilt für alle  $i < n$ . Ein  $AB$ -Pfad ist entsprechend definiert. Mit Induktion nach  $|E|$  zeigen wir, dass für jeden gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  die Größe  $k$  eines kleinsten  $AB$ -Trenners gleich der maximalen Anzahl von paarweise disjunkten  $AB$ -Pfadern ist. Wenn wir den ursprünglichen Graphen als gerichteten Graphen interpretieren, indem wir anstelle einer ungerichteten Kante  $\{x, y\}$  die beiden Orientierungen  $(x, y)$  und  $(y, x)$  aufnehmen, dann folgt aus der Aussage für gerichtete Graphen die Aussage des Satzes.

Wenn  $E = \emptyset$  gilt, dann ist  $|A \cap B| = k$  und die Knoten in  $A \cap B$  bilden  $k$  disjunkte  $AB$ -Pfade der Länge 0. Sei jetzt  $e = (x, y)$  eine Kante in  $E$ . Wir entfernen die Kante  $e$  und erhalten den Graph  $G' = (V, E \setminus \{e\})$ . Wenn der kleinste  $AB$ -Trenner in  $G'$  die Größe  $k$  hat, dann erhalten wir mit Induktion  $k$  disjunkte  $AB$ -Pfade in  $G'$ . Diese sind auch disjunkt in  $G$ .

Sei also  $C$  ein  $AB$ -Trenner in  $G'$  mit  $|C| \leq k - 1$ . Sowohl  $F = C \cup \{x\}$  als auch  $G = C \cup \{y\}$  sind  $AB$ -Trenner in  $G$ . Es folgt  $|F| = k = |G|$ . Sowohl jeder  $AF$ -Trenner in  $G'$  als auch jeder  $GB$ -Trenner in  $G'$  ist ein  $AB$ -Trenner in  $G$ . Mit Induktion existieren  $k$  disjunkte  $AF$ -Pfade  $\mathcal{P}$  in  $G'$  als auch  $k$  disjunkte  $GB$ -Pfade  $\mathcal{Q}$  in  $G'$ . Die Pfade aus  $\mathcal{P}$  und die Pfade aus  $\mathcal{Q}$  schneiden sich nur in  $C$ , denn sonst gäbe es einen  $AB$ -Pfad, der  $C$  gar nicht schneidet. In jedem Knoten aus  $F$  endet ein  $AF$ -Pfad aus  $\mathcal{P}$  und in jedem Knoten aus  $G$  beginnt ein  $GB$ -Pfad aus  $\mathcal{Q}$ . Wir können damit die Pfade aus  $\mathcal{P}$  und aus  $\mathcal{Q}$  aneinander hängen und erhalten  $k$  disjunkte  $AB$ -Pfade in  $G$ ; den Pfad nach  $x$  setzen wir hierbei mit dem Pfad ab  $y$  fort (dies ist möglich, da  $(x, y) \in E$  ist).  $\square$

## 7 Der Satz von Menger

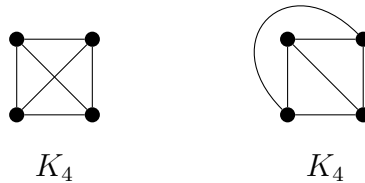
Den Heiratssatz ?? kann man als ein Korollar des Satzes von Menger erhalten: Die Heiratsbedingung liefert dass  $A$  ein minimaler  $AB$ -Trenner ist, und der Satz von Menger liefert nun das perfekte Matching als disjunkte  $AB$ -Wege der Länge 1.

# 8 Planare Graphen

Ein Graph ist *planar*, falls er sich ohne Überschneidung von Kanten in die Ebene zeichnen lässt. Jeder planare Graph lässt sich auch ohne Kantenüberschneidung auf die Kugeloberfläche zeichnen. Umgekehrt sei  $G$  ein Graph, welcher sich ohne Kantenüberschneidung auf einer Kugeloberfläche zeichnen lässt. Wir können uns vorstellen, dass die Kugeloberfläche ein Ballon ist, bei der wir an einer Stelle, an der sich kein Knoten und keine Kante befindet, ein kleines Loch hineinschneiden. An dieser Stelle können wir den Luftballon stramm ziehen, so dass wir eine kreuzungsfreie Darstellung von  $G$  in der Ebene erhalten.

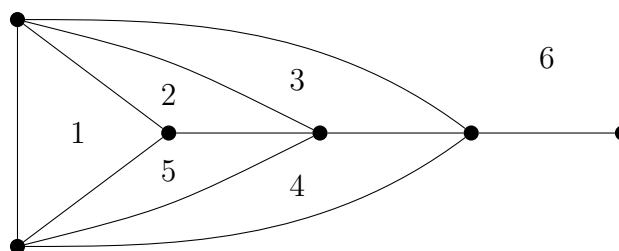
Dies zeigt zum einen, dass es bei der Definition des Begriffs *planar* gleichwertig ist, ob wir eine kreuzungsfreie Darstellung in der Ebene oder auf der Kugeloberfläche fordern. Darüberhinaus sehen wir, dass man planare Graphen stets so zeichnen kann, dass eine beliebige Kante  $e$  außen liegt, denn wir können das Loch in den Luftballon neben der Kante  $e$  schneiden.

Der Graph  $K_4$  ist planar, aber nicht jede Zeichnung ist kreuzungsfrei.



Um hier unterscheiden zu können, spricht man manchmal von *plättbar*, wenn man einen Graphen meint, der zwar eine kreuzungsfreie Einbettung in die Ebene besitzt, bei dem aber noch keine solche Einbettung gegeben ist. Für uns ist die Unterscheidung, ob eine kreuzungsfreie Einbettung tatsächlich bekannt ist oder nicht, nicht so wichtig. Deshalb verwenden wir nur den Begriff *planar*.

Eine *Facette* eines planaren Graphen ist eine maximale zusammenhängende Fläche in der Ebene, welche keine Kanten und keine Knoten enthält. Bei zusammenhängenden Graphen wird jede Facette von einem geschlossenen Kantenzug umrandet. Wir zählen hierbei auch die Facette, welche durch die Außenseite des Graphen umrandet ist. Der  $K_1$  und der  $K_2$  besitzen jeweils nur eine Facette; der folgende Graph besitzt 6 Facetten.



Anstatt von Facetten spricht man häufig auch von *Flächen* oder *Gebieten*. Bei einer planaren Einbettung in die Ebene gibt es stets nur eine unendlich große Facette (umrandet von der Außenseite); wir nennen diese die *äußere* Facette. Die obigen Überlegungen zur Kugeloberfläche zeigen, dass man einen planaren Graphen stets so kreuzungsfrei in die Ebene zeichnen kann, dass eine beliebige Facette die äußere Facette ist.

Wir verwenden in diesem Abschnitt folgende Bezeichner:

- $G$  = ein beliebiger Graph
- $V$  = Knoten von  $G$  (mit  $V \neq \emptyset$ )
- $E$  = Kanten von  $G$
- $F$  = Facetten von  $G$ , falls  $G$  planar ist  
(hängt von der planaren Einbettung ab)
- $n$  = Anzahl der Knoten von  $G$
- $e$  = Anzahl der Kanten von  $G$
- $f$  = Anzahl der Facetten von  $G$ , falls  $G$  planar ist
- $z$  = Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $G$

TODO Def.  $\ell_g$  Länge einer Facette  $g \in F$

TODO Satz  $\sum_{g \in F} \ell_g = 2e$  (analog zu Satz 2.1)

## 8.1 Die Eulerformel

Eine der wichtigsten Eigenschaften von planaren Graphen ist die Eulerformel, welche in einer etwas allgemeineren Form auch unter dem Namen *Eulersche Polyederformel* bekannt ist.

**Satz 8.1 (Eulerformel)** *Wenn  $G$  planar und zusammenhängend ist, dann gilt*

$$n - e + f = 2$$

*Beweis:* Wir machen eine Induktion nach  $f$ : Für  $f = 1$  existieren keine Kreise, d.h.  $G$  ist ein Baum. Nach Satz 5.1 gilt  $e = n - 1$  und damit  $n - e + f = n - (n - 1) + 1 = 2$ . Sei nun  $f \geq 2$  und sei  $xy$  eine Kante auf einem Kreis von  $G$ . Betrachte  $G' = (V, E \setminus \{xy\})$ . Die Kante  $xy$  liegt an zwei Facetten in  $G$  (formal verwenden wir hier den Jordanschen Kurvensatz). In  $G' = (V', E')$  gilt deshalb  $n' = |V'| = |V| = n$  sowie  $e' = |E'| = e - 1$  und  $f' = f - 1$ , wobei  $f'$  die Anzahl der Facetten von  $G'$  ist, welche wir erhalten, wenn wir in der Zeichnung von  $G$  die Kante  $xy$  weglassen. Damit ist  $n - e + f = n' - (e' + 1) + (f' + 1) = n' - e' + f' = 2$ , wobei die letzte Gleichheit mit Induktion folgt.  $\square$

**Satz 8.2 (Eulerformel)** *In planaren Graphen gilt  $n - m + f - z = 1$ .*

*Beweis:* Sei  $G$  ein planarer Graph. Wir machen eine Induktion nach  $m$ . Wenn  $m = 0$  ist, dann sind alle Knoten isoliert, und es gilt  $n = z$  sowie  $f = 1$ . Sei nun  $m > 0$  und  $e$  eine Kante von  $G = (V, E)$ . Wir betrachten den Graphen  $G' = (V, E \setminus \{e\})$ . Sei  $m' = m - 1$  seine Kantenzahl, sei  $f'$  die Zahl seiner Facetten (wenn wir in der Zeichnung von  $G$  die Kante  $e$  weglassen), und sei  $z'$  die Zahl der Zusammenhangskomponenten von  $G'$ . Nach Induktionsvoraussetzung erfüllt  $G'$  die Formel  $n - m' + f' - z' = 1$ .

Falls  $e$  auf einem einfachen Kreis liegt, dann hat sich durch Entfernen von  $e$  die Zahl der Zusammenhangskomponenten nicht verändert, jedoch wurden zwei Facetten zu einer verschmolzen, denn auf den beiden Seiten von  $e$  liegen unterschiedliche Facetten. In diesem Fall gilt also  $f' = f - 1$  und  $z' = z$ . Falls  $e$  auf keinem einfachen Kreis liegt, dann sind jetzt die beiden Endpunkte von  $e$  in verschiedenen Zusammenhangskomponenten, d.h., es gilt  $z' = z + 1$ . Außerdem liegt an den beiden Seiten von  $e$  die selbe Facette. Also ist  $f' = f$ . In jedem Fall gilt damit die Behauptung.  $\square$

Aus der Eulerformel folgt unter anderem, dass zwei verschiedene planare Einbettungen eines planaren Graphen stets die gleiche Anzahl an Facetten besitzen. Im Folgenden wollen wir weitere Schlussfolgerungen aus der Eulerformel ziehen. Bei nicht-zusammenhängenden Graphen besitzt die äußere Facette andere topologische Eigenschaften als die übrigen Facetten. Wenn wir die äußere Facette aber trotzdem nur einfach zählen, ergibt sich die folgende Verallgemeinerung der Eulerformel.

**Korollar 8.3** *Wenn  $G$  planar ist, dann gilt*

$$n - e + f - z = 1$$

*Beweis:* Seien  $C_1, \dots, C_z$  die Zusammenhangskomponenten von  $G$  und sei  $n_i$  die Knotenzahl,  $e_i$  die Kantenzahl und  $f_i - 1$  die Anzahl der inneren Facetten der Komponente  $C_i$ . Hinzunahme der gemeinsamen äußeren Facette liefert  $f = 1 + \sum_i (f_i - 1) = 1 - z + \sum_i f_i$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} n - e + f - z &= \sum_{i=1}^z n_i - \sum_{i=1}^z e_i + \left(1 - z + \sum_{i=1}^z f_i\right) - z \\ &= 1 - 2z + \sum_{i=1}^z (n_i - e_i + f_i) \\ &= 1 - 2z + 2z = 1 \end{aligned}$$

$\square$

**Korollar 8.4** *In planaren Graphen ist  $e \in \mathcal{O}(n)$ ; genauer gilt für  $n \geq 3$ , dass*

$$e \leq 3n - 6$$

*Beweis:* Nach dem Einzeichnen von weiteren Kanten können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $G$  zusammenhängend ist. Wir zählen die *Kantenseiten*: Jede Kante hat 2 Seiten. Dies liefert genau  $2e$  Kantenseiten. Andererseits wird jede Facette von mindestens 3 Kantenseiten begrenzt; eine Ausnahme bilden hier nur  $K_1$  und  $K_2$ , bei denen die einzige Facette von keiner bzw. nur von 2 Kantenseiten begrenzt wird. Ein planarer Graph mit  $n \geq 3$  hat also mindestens  $3f$  Kantenseiten. Insbesondere gilt  $3f \leq 2e$  und mit der Eulerformel folgt

$$6 = 3n - 3e + 3f \leq 3n - e$$

□

**Korollar 8.5** *Der vollständige Graph mit 5 Knoten  $K_5$  ist nicht planar.*

*Beweis:* Für  $G = K_5$  gilt  $n = 5$  und  $e = \binom{5}{2} = 10$ . Wegen  $10 > 3 \cdot 5 - 6 = 9$  kann  $K_5$  nach Korollar 8.4 nicht planar sein. □

**Korollar 8.6** *In bipartiten planaren Graphen mit  $n \geq 3$  gilt*

$$e \leq 2n - 4$$

*Beweis:* Analog zum Beweis von Korollar 8.4 zählen wir die Kantenseiten. In bipartiten planaren Graphen mit  $n \geq 3$  liefert jede Facette mindestens 4 Kantenseiten, d.h.  $4f \leq 2e$  und damit  $2f \leq e$ . Mit der Eulerformel folgt

$$4 = 2n - 2e + 2f \leq 2n - e$$

□

**Korollar 8.7** *Der vollständige bipartite Graph  $K_{3,3}$  ist nicht planar.*

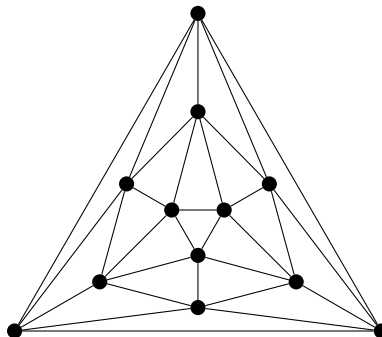
*Beweis:* Für  $G = K_{3,3}$  gilt  $n = 6$  und  $e = 3 \cdot 3 = 9$ . Wegen  $9 > 2 \cdot 6 - 4 = 8$  kann  $K_{3,3}$  nach Korollar 8.6 nicht planar sein. □

**Korollar 8.8** *Wenn  $G$  planar und  $k$ -regulär ist, dann ist  $k \leq 5$ .*

*Beweis:* Nach Satz 2.1 gilt  $kn = 2e$ . Mit Korollar 8.4 folgt  $e = \frac{kn}{2} \leq 3n - 6$ . Daraus ergibt sich  $12 \leq n(6 - k)$  und  $k \leq 5$ . □



Die folgende Darstellung eines Ikosaeder zeigt, dass es planare 5-reguläre Graphen gibt. Für das Ikosaeder gilt  $n = 12$ ,  $e = 30$  und  $f = 20$ . Insbesondere gilt hier Gleichheit bezüglich der Schranke aus Korollar 8.4 (wie bei jedem planaren Graphen, bei dem alle Facetten Dreiecke sind). Die Abschätzung im Beweis von Korollar 8.8 zeigt, dass das Ikosaeder der kleinste planare 5-reguläre Graph ist.



**Korollar 8.9** In jedem planaren Graph existiert ein Knoten  $x$  mit Grad  $d_x \leq 5$ .

*Beweis:* Angenommen alle Knoten haben mindestens Grad 6. Mit  $6n \leq \sum_{x \in V} d_x = 2e$  und der Abschätzung aus Korollar 8.4 ergibt sich durch  $3n \leq e \leq 3n - 6$  ein Widerspruch.  $\square$

## 8.2 Der Satz von Kuratowski

In den Korollaren 8.5 und 8.7 haben wir gesehen, dass die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  nicht planar sind. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass diese beiden Graphen im Prinzip die einzigen (Archetypen von) nicht planaren Graphen sind.

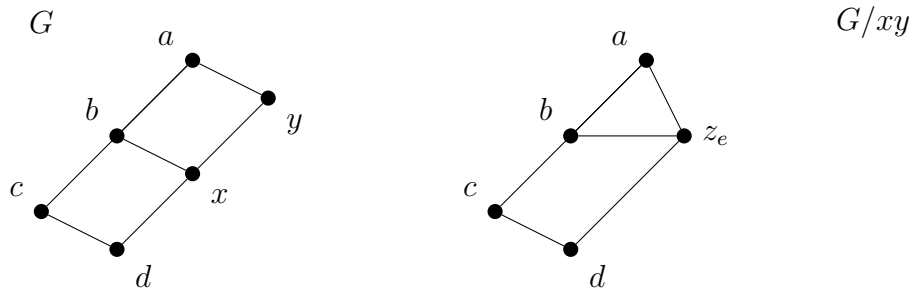
**Entfernen von Knoten** Sei  $U \subseteq V$ ,  $G - U := G[V - U]$  mit  $G[W] = (W, \binom{W}{2} \cap E)$ . Für  $U = \{x\}$  verwenden wir die vereinfachte Schreibweise  $G - x$ .

**Bemerkung 8.10**  $G$  planar  $\Rightarrow G - U$  planar

**Kantenkontraktion** Sei  $e = xy \in E$ .  $G/xy = (V - \{x, y\} \dot{\cup} z_e, E')$  wobei  $z_e$  neu ist und

$$E' = \{zz_e \mid z \notin \{x, y\}, zx \in E \text{ oder } zy \in E\} \cup \{zz' \in E \mid \{z, z'\} \cap \{x, y\} = \emptyset\}$$

**Beispiel 8.11**

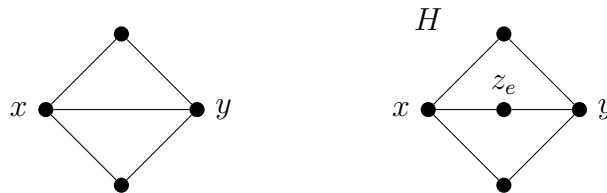


◇

**Bemerkung 8.12**  $G$  planar  $\Rightarrow G/xy$  planar

$H$  entsteht durch eine Unterteilung der Kante  $e = xy$ , falls  $H = (V \dot{\cup} \{z_e\}, E')$  mit  $z_e$  neu und  $E' = (E - \{x, y\}) \cup \{xz_e, z_ey\}$ .

**Beispiel 8.13**

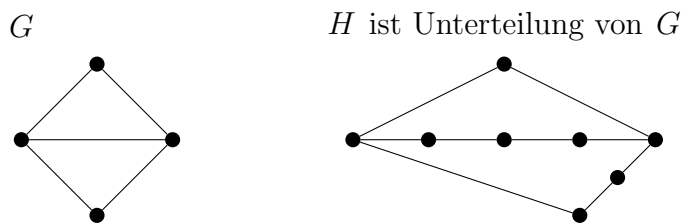


◇

**Bemerkung 8.14**  $G$  planar  $\Rightarrow H$  planar

**Definition 8.15 (Unterteilung)**  $H$  ist Unterteilung von  $G$ , falls  $H$  durch  $i$ -fache Unterteilung von Kanten,  $i \geq 0$  aus  $G$  entsteht.

**Beispiel 8.16**

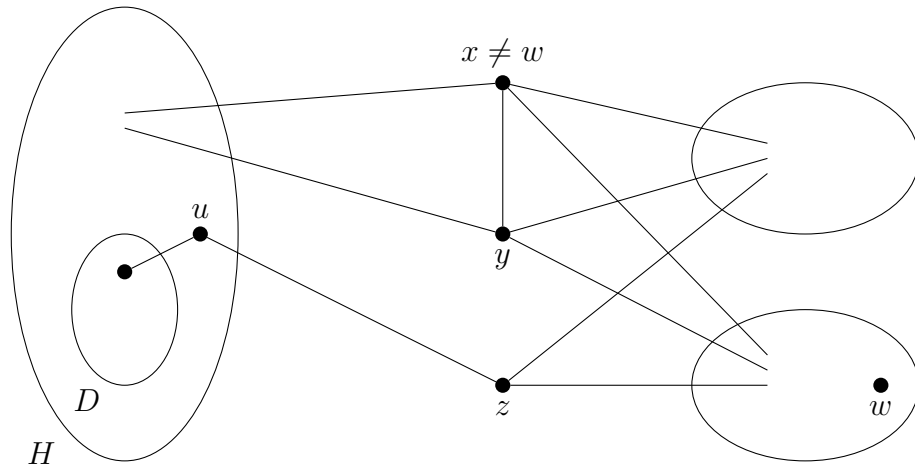


◇

**Definition 8.17 (k-zusammenhängend)**  $G$  ist  $k$ -zusammenhängend ( $k$ -fach zusammenhängend), falls  $\forall U \subseteq V : |U| < k \Rightarrow G - U$  ist zusammenhängend.

**Satz 8.18 (Thomassen, 1980)** Jeder 3-zusammenhängende Graph  $G = (V, E)$  mit  $|V| \geq 5$  besitzt eine Kante  $xy \in E$  so, dass  $G/xy$  3-zusammenhängend bleibt.

*Beweis:* Wähle  $e = xy \in E$ . Falls  $G/xy$  3-zusammenhängend ist, so sind wir fertig. Andernfalls reichen zwei Knoten, damit  $G/xy$  ohne diese Knoten zerfällt. Einer dieser Knoten muss  $z_e$  sein, d.h.  $\exists z \in V : G - \{x, y, z\}$  zerfällt.



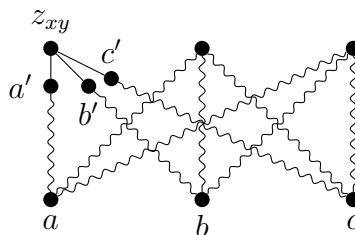
Wähle eine Zusammenhangskomponente  $H$  von  $G - \{x, y, z\}$  (vorzugsweise mit  $|H|$  minimal). Behauptung: Es existiert eine Kante  $f$  in  $G[H \cup \{z\}]$  mit  $G/f$  ist 3-zusammenhängend. Beweis mit Induktion nach  $|H|$ . Die Knoten  $x, y, z$  haben jeweils eine Kante zu mindestens einem Knoten aus jeder Komponente. Wähle  $u \in H$  mit  $uz \in E$ . Falls  $G/uz$  3-zusammenhängend ist, so sind wir fertig. Andernfalls existiert ein Knoten  $w$  mit  $G - \{u, z, w\}$  zerfällt.  $w \neq x$ , sonst vertausche  $x$  und  $y$ . Wähle eine Komponente  $D$  von  $G - \{u, z, w\}$  mit  $x \notin D$ .  $xy \in E \Rightarrow y \notin D$  d.h.  $D \cap \{x, y, z, w, u\} = \emptyset$ ,  $D \neq \emptyset$  ( $y = w$  ist möglich).  $u$  hat einen Nachbar in  $D \Rightarrow D \subseteq H - \{u\}$ . Wir können Induktion auf  $D$  ( $|D| < |H|$ ) mit dem Graphen  $G - \{u, z, w\}$  anwenden.  $\square$

**Korollar 8.19** Die Kante  $xy$  aus vorigem Satz 8.18 kann in Polynomialzeit gefunden werden.

**Lemma 8.20** Sei  $G = (V, E)$  ein 3-zusammenhängender Graph mit  $|V| \geq 5$ . Wähle die Kante  $xy$  nach Thomassen. Falls  $G/xy$  eine Unterteilung des  $K_5$  oder des  $K_{3,3}$  enthält, so auch  $G$ .

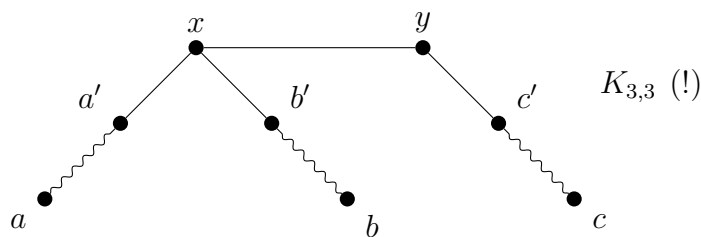
*Beweis:* Zeige zunächst,  $G/xy$  enthält Unterteilung des  $K_{3,3}$  impliziert  $G$  enthält Unterteilung des  $K_{3,3}$ :

in  $G/xy$ :



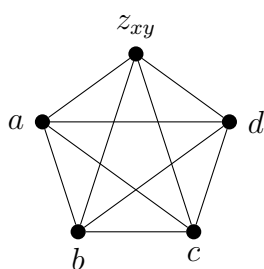
Wird hier Thomassen ueberhaupt verwendet?

☐ existiert  $(x, a') \in E$ ,  $(x, b') \in E$  in  $G$  (sonst tausche  $x$  und  $y$ ). Falls  $(x, c') \in E$  sind wir fertig. Andernfalls sei  $(y, c') \in E$

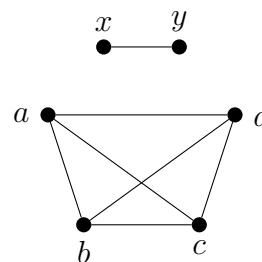


Zeige nun,  $G/xy$  enthält Unterteilung des  $K_5$  impliziert  $G$  enthält Unterteilung des  $K_{3,3}$  oder des  $K_5$ .

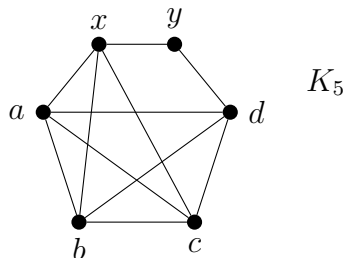
in  $G/xy$ :



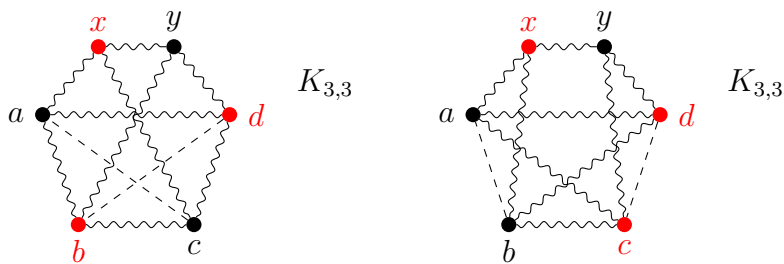
in  $G$ :



wobei wir in  $G$  zunächst nur diejenigen Kanten eingezeichnet haben, von denen wir sicher sein können, dass sie existieren. Wir unterscheiden nun, welche weiteren Kanten existieren müssen. Falls  $x$  (oder  $y$ ) 3 Nachbarn in  $\{a, b, c, d\}$  besitzt:



Seien  $x$  und  $y$  jeweils mit 2 der Knoten  $a, b, c, d$  verbunden:



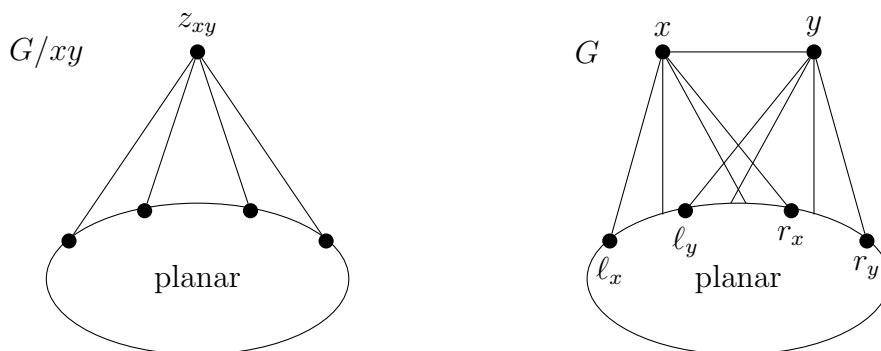
☐

**Satz 8.21 (Kuratowski, 1930)**  $G$  ist genau dann planar, wenn  $G$  keine Unterteilung des  $K_5$  oder des  $K_{3,3}$  als (nicht notwendigerweise induzierten) Untergraph enthält.

*Beweis:* Die Richtung " $\Rightarrow$ " ist trivial, da  $K_5$  und  $K_{3,3}$  nicht planar sind. Die Gegenrichtung wird mit einer Fallunterscheidung bewiesen, dabei sei  $\mathbb{C} \in |V| \geq 5$ :

**1. Fall:**  $G$  ist 3-zusammenhängend

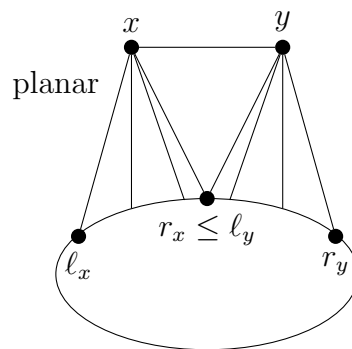
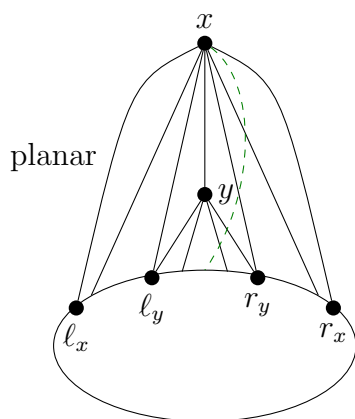
Wähle die Kante  $xy$  nach Thomassen. Falls  $G/xy$  einen  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  enthält, so auch  $G$ . Mit Induktion ist  $G/xy$  planar. Sei  $z_{xy}$  der Knoten, der  $xy \in E$  entspricht.  $\mathbb{C} z_{xy}$  liegt auf der äußeren Facette von  $G/xy$  (Stichwort "Kugeloberfläche").



Es folgen die Fallunterscheidungen über die Anordnung von  $l_x, r_x, l_y, r_y$ . Beachte dass die Knoten am Rand der  $z_{xy}$ -Facette von  $G - z_{xy}$  alle verschieden sind, da  $G$  3-zusammenhängend ist.

Fall A:  $l_x \leq l_y < r_y < r_x$

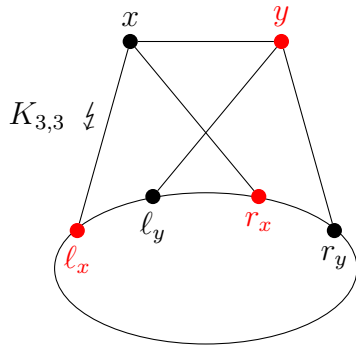
Fall B:  $l_x < r_x \leq l_y < r_y$



(gestrichelte Kanten liefern eine Unterteilung des  $K_{3,3}$ )

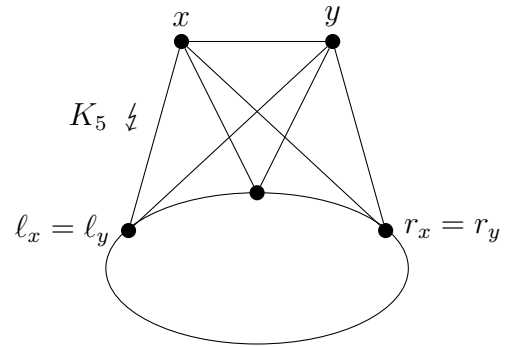
Fall C:

$$\ell_x < \ell_y < r_x < r_y$$



Fall D:

$$\ell_x = \ell_y < r_x = r_y$$



Sind wir weder in Fall A noch in Fall B, dann tritt Fall C oder D ein.

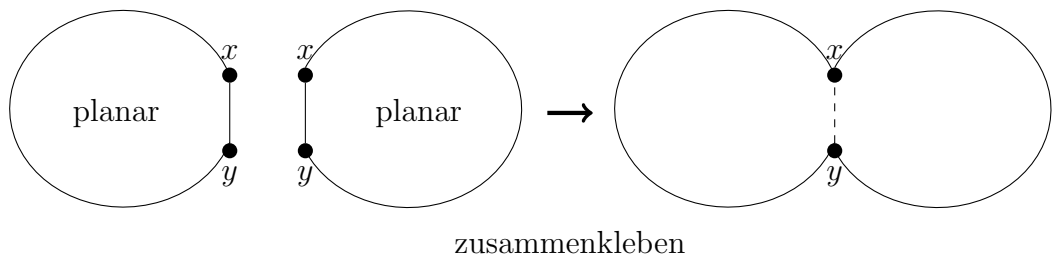
**2. Fall:**  $G$  ist 2-zusammenhängend, aber nicht 3-zusammenhängend

Seien  $x, y \in V$  mit  $G - \{x, y\}$  zerfällt in  $V_1 \neq \emptyset$  und  $V_2 \neq \emptyset$ .

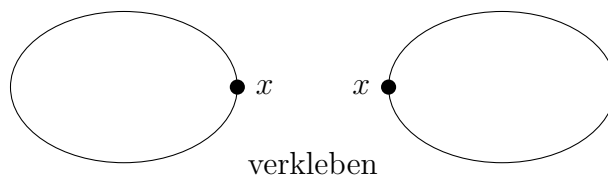
$$G_1 := G[V_1 \cup \{x, y\}] + \text{Kante } xy$$

$$G_2 := G[V_2 \cup \{x, y\}] + \text{Kante } xy$$

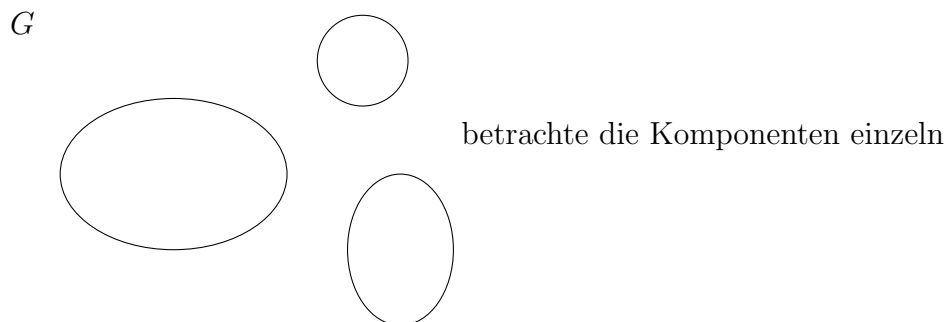
Hierbei ist es egal, ob die Kante  $xy$  schon vorhanden ist. Beachte: In  $G[V_1 \cup \{x, y\}]$  existiert ein Weg von  $x$  nach  $y$ , analog in  $G[V_2 \cup \{x, y\}]$ . Daraus folgt,  $G_1$  und  $G_2$  enthalten keine Unterteilung des  $K_5$  oder des  $K_{3,3}$ . Nach Induktionsvoraussetzung sind  $G_1$  und  $G_2$  planar.  $\mathcal{G}$  liegt die Kante  $(x, y)$  auf der äußeren Facette.



**3. Fall:**  $G$  ist 1-zusammenhängend, aber nicht 2-zusammenhängend



**4. Fall:**  $G$  ist nicht zusammenhängend



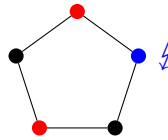
□

**Korollar 8.22** *Man kann in Polynomialzeit überprüfen, ob ein Graph planar ist.*

### 8.3 Färbbarkeit von planaren Graphen

**Definition 8.23 (Färbung, k-Färbung, k-färbbar)**  $c : V \rightarrow C$  ist eine Färbung, falls  $\forall xy \in E : c(x) \neq c(y)$ ,  $C =$  Menge der Farben.  $c$  ist k-Färbung, falls  $|C| = k$ .  $G$  ist k-färbbar, falls eine k-Färbung existiert.  $\chi(G) =$  minimale Anzahl von Farben, die ausreicht, um  $G$  zu färben.

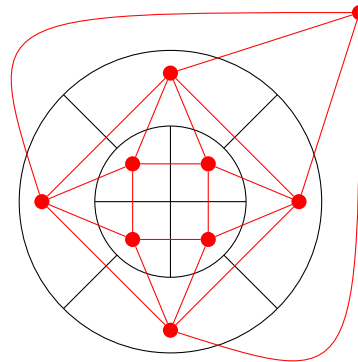
**Beispiel 8.24**  $\chi(K_n) = n$ ,  $\chi(C_5) = 3$ :



$\chi(C_6) = 2$ ,  $\chi(K_{m,n}) \leq 2$ ,  $\chi(B) \leq 2$  für Bäume  $B$  (Ebenen jeweils in gleicher Farbe).

◇

Motivation:



**Satz 8.25 (4-Farben-Satz)**  $G$  planar  $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$

*Beweis:* Hier ohne Beweis. Beweis durch Fallunterscheidung: Appel / Haken 1976 in ca. 2000 Fälle, später 1500 Fälle. Thomas 1995 / Robertson 1996 in ca. 600 Fälle. □

**Lemma 8.26**  $G$  planar  $\Rightarrow \chi(G) \leq 6$ .

*Beweis:* Sei  $x \in V$  mit  $d_x \leq 5$  (existiert nach Korollar 8.9 aus Eulerformel). Färbe  $G - x$  induktiv mit 6 Farben.  $d_x \leq 5 \Rightarrow$  Färbung kann auf  $G$  ausgedehnt werden, da mindestens eine der 6 Farben für  $x$  übrig bleibt.  $\square$

**Korollar 8.27** Eine 6-Färbung von planaren Graphen kann in Linearzeit berechnet werden.

*Beweis:* Eingabe: Adjazenzliste.

Schritt 1: Liste  $L_i$ ,  $0 \leq i < n$ , enthält alle  $x \in V$  mit Grad  $d_x = i$ . (liegt in  $\mathcal{O}(n)$ )

Schritt 2:

**for**  $i = 1, \dots, n$  **do**

$v_i :=$  Knoten mit minimalem Grad in  $\cup_j L_j$ ; //  $v_i \in L_j$  mit  $j \leq 5$

entferne  $v_i$  aus den Listen;

Update der Nachbarn von  $v_i$ ; // liegt in  $\mathcal{O}(d_{v_i})$ ;

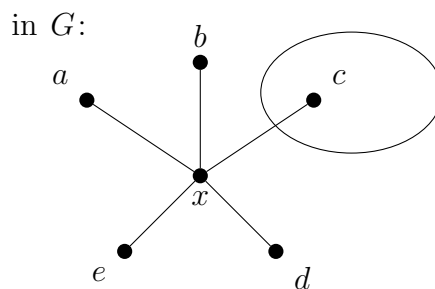
**end for**

(liegt in  $\mathcal{O}(\sum_x d_x) = \mathcal{O}(n)$ )

Schritt 3: Färbe  $v_n, \dots, v_1$  (absteigende Reihenfolge) nacheinander mit der kleinsten freien Farbe (liegt in  $\mathcal{O}(\sum_x d_x)$ ).  $\square$

**Satz 8.28**  $G$  planar  $\Rightarrow \chi(G) \leq 5$

*Beweis* ("Standardbeweis"): Sei  $x \in V$  mit  $d_x$  minimal. Falls  $d_x \leq 4$ : 5-Färbung von  $G$  aus  $G - x$ . Falls  $d_x = 5$ : Wir färben  $G' = G - x$  (induktiv)



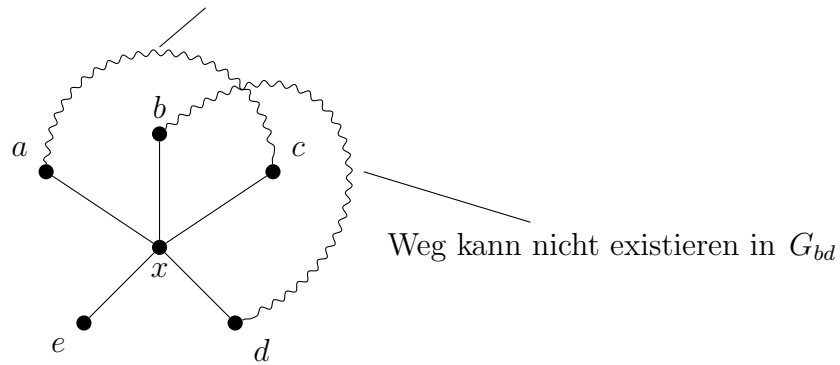
$\mathbb{E}$  seien die Farben der Knoten  $a, \dots, e$  alle verschieden (sonst sind wir fertig) und  $\mathbb{E}$  bezeichne  $i$  die Farbe von Knoten  $i \in \{a, \dots, e\}$ . Sei  $G_{ac}$  der induzierte UG von  $G'$ , der nur aus Knoten mit den Farben von  $a$  oder von  $c$  besteht.

1.Fall:  $a, c$  in verschiedenen Zsh-Komponenten von  $G_{ac} \Rightarrow$  vertausche Farben von  $a$  und  $c$  in einer Zsh-Komponente in  $G_{ac} \Rightarrow$  freie Farbe für  $x$ .

2.Fall:  $a$  und  $c$  in gleicher Zsh-Komponente



Weg ausschließlich mit Farben  $a$  oder  $c$  gefärbt



Betrachte  $G_{bd}$ :  $b$  und  $d$  liegen in unterschiedlichen Zsh-Komponenten. Tausche Farben in einer Zsh-Komponente in  $G_{bd} \Rightarrow$  freie Farbe für  $x$ .  $\square$

*Beweis (Abwandlung des "Standardbeweis")*: Wie eben  $\mathbb{E} d_x = 5$ ,  $N(x) = \{a, b, c, d, e\}$ .  $ac \in E \Rightarrow bd \notin E$ .  $\mathbb{E} ac \notin E$ . Kontrahiere Kanten  $xa, xc$ :  $G' = (G/xa)/z_{xac}$ . Sei  $z = z_{z_{xac}}$  der entstandene Knoten. Färbe  $G'$  induktiv. In  $G$  erhalten  $a$  und  $c$  die Farbe von  $z$  in  $G' \Rightarrow$  Farbe für  $x$  frei.  $\square$

Dies führt zu folgendem Algorithmus:

Eingabe: Adjazenzliste, Nachbarn im Uhrzeigersinn angeordnet, beginnend mit Nachbarn mit minimalem Grad.

Schritt 1: Listen  $L_i$ ,  $0 \leq i \leq n$  mit  $x \in V$ ,  $d_x = i$  (liegt in  $\mathcal{O}(n)$ )

Schritt 2:

```

while  $i \leq n$  do
   $v :=$  Knoten mit minimalem Grad in  $\cup_j L_j$ ;
  if  $d_v < 5$  then
     $v_i := v$ ;
     $i := i + 1$ ;
    Entferne  $v$ , Update der Nachbarn;
  else //  $d_v = 5$ 
    Finde  $a, c \in N(v)$  mit  $ac \notin E$ ; // nicht konstant
     $v_i := v$ ;
     $v_{i+1} := a$ ; Verweis auf  $c$  bei  $v_{i+1}$ ;
     $i := i + 2$ ;
    Verschmelze Knoten  $v, a, c$  zu  $c$ ;
  end if
end while

```

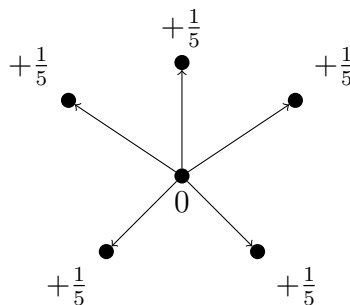
Schritt 3: Färbe  $v_n, \dots, v_1$ ; bei Verweis  $a \rightarrow c$ , verwende für  $a$  die Farbe von  $c$ .

**Satz 8.29 (Wernicke, 1904)**  $G$  planar, Minimalgrad 5  $\Rightarrow \exists xy \in E : d_x = 5, d_y \leq 6$ .

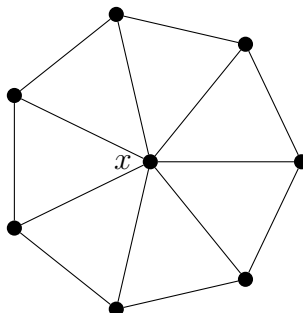
*Beweis (durch "Discharging")*:  $\mathbb{E} G$  ist trianguliert (d.h. durch Hinzufügen von Kanten werden alle Facetten – auch die äußere – zu Dreiecken; dies erhöht den Grad nur). Insbesondere gilt  $3f = 2e$ .

1.Phase: "Gewichten". Jeder Knoten  $x$  erhält das Startgewicht  $6 - d_x$ . Für das Gesamtgewicht gilt  $\sum_{x \in V} (6 - d_x) = 6|V| - 2|E| \stackrel{\text{Eulerformel}}{=} 12 > 0$ .

2.Phase: "Verteilen". Jeder Knoten mit Grad 5 gibt jedem seiner Nachbarn  $\frac{1}{5}$  von seinem Gewicht.



Sei  $y$  ein Knoten mit positivem Gewicht nach Phase 2. Es gilt  $d_y \leq 7$ , da Startgewicht  $6 - d_y$  und maximal  $\frac{d_y}{5}$  kommen hinzu.  $0 < \text{Gewicht von } y \leq 6 - d_y + \frac{d_y}{5} = 6 - \frac{4d_y}{5}$ .  $y$  hat Nachbarn mit Grad 5.  $d_y \leq 6 \Rightarrow$  fertig.  $d_y = 7$ : Mindestens 6 Nachbarn von  $y$  haben Grad 5.



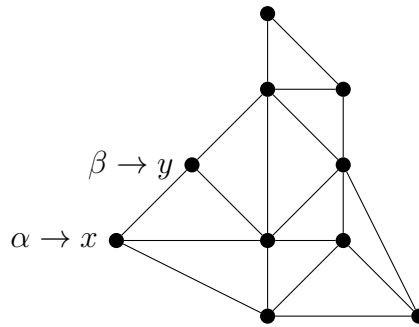
$G$  trianguliert  $\Rightarrow$  mindestens zwei Nachbarn von  $y$  mit Grad 5 sind durch eine Kante verbunden.  $\square$

**Definition 8.30 (L-Listenfärbung, k-listenfärbbar)** Sei  $L : V \rightarrow 2^C \setminus \{\emptyset\}$  Liste von mögliche Farben für jeden Knoten. Eine L-Listenfärbung  $c : V \rightarrow C$  ist eine Färbung mit  $c(x) \in L(x)$ .  $G$  ist k-listenfärbbar, falls für alle Listen  $L : V \rightarrow \binom{C}{k} = \{M \subseteq C \mid |M| = k\}$  (und alle  $C$ ) eine L-Listenfärbung existiert.  $\chi_\ell(G) =$  minimales  $k$ , so dass  $G$  k-listenfärbbar ist.

**Bemerkung 8.31**  $\chi(G) \leq \chi_\ell(G)$

**Satz 8.32 (Thomassen)**  $\chi_\ell(G) \leq 5$ , wenn  $G$  planar ist.

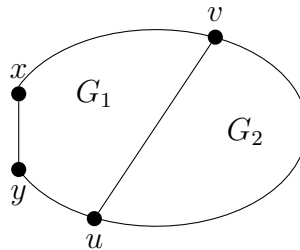
*Beweis:*  $\mathbb{E}$  seien alle (bis auf die äußere) Facetten trianguliert und alle Knoten haben mindestens Grad 2. Einen solchen Graph nennen wir *fast trianguliert*.



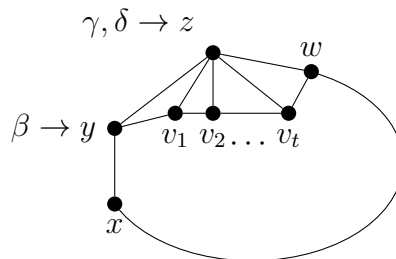
Der Satz folgt aus folgender Behauptung: Unter folgender Invariante für  $L$  kann  $G$   $L$ -listengefärbt werden:

- (a) Maximal zwei Knoten  $x, y$  ( $xy \in E$ ) auf der äußeren Facette  $g_0$  sind schon mit 2 verschiedenen Farben  $\alpha$  und  $\beta$  gefärbt.
- (b) Für alle anderen Knoten  $v$  auf  $g_0$  gilt  $|L(v)| \geq 3$
- (c) Für alle inneren Knoten  $v$  gilt  $|L(v)| \geq 5$

$|V| = 3 \checkmark$ . Sei nun  $|V| > 3$ . 1.Fall:  $g_0$  besitzt Sehne  $uv$

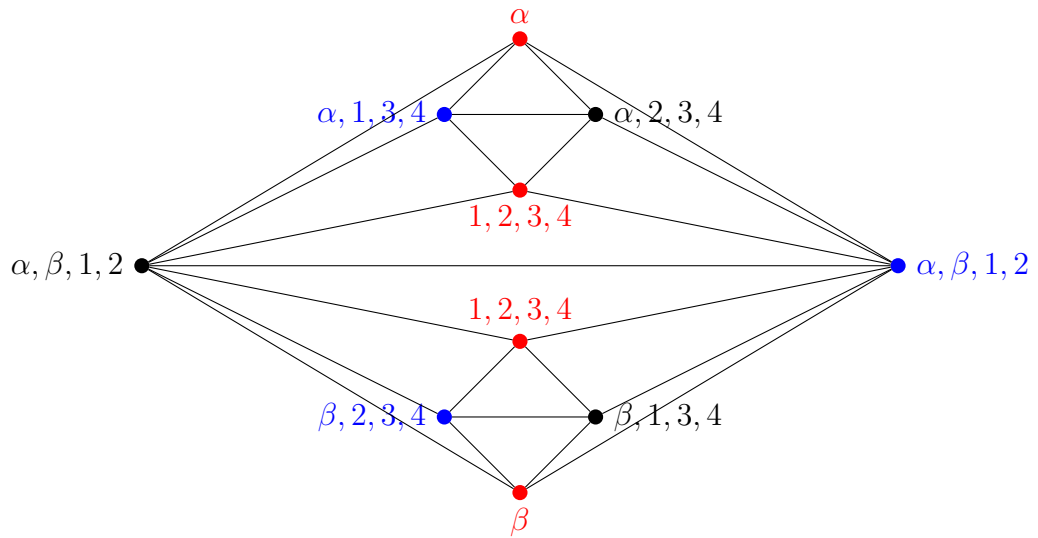


Färbe  $G_1$  induktiv, färbe  $G_2$  induktiv ( $u, v$  übernehmen dort die Rolle von  $x, y$ ).  
2.Fall:  $g_0$  besitzt keine Sehne.

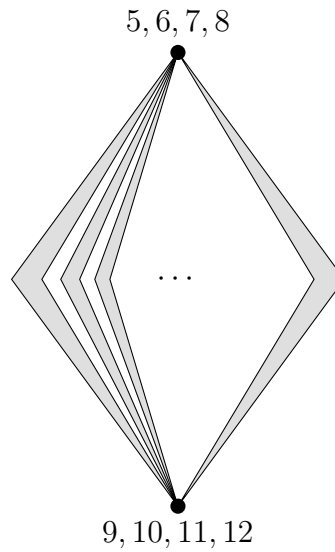


Sei  $z \neq x, yz \in E, z \in g_0$ .  $G$  fast trianguliert  $\Rightarrow$  Nachbarn  $v_i$  von  $z$  bilden Weg  $yv_1 \dots v_t w, w \in B$ .  $G' = G - z$ . Sei  $\{\gamma, \delta\} \subseteq L(z) \setminus \{\beta\}$ . Setze  $L'(v_i) = L(v_i) \setminus \{\gamma, \delta\}$ , sonst  $L' = L$ .  $L'$  erfüllt die Invariante für  $G' \stackrel{IV}{\Rightarrow} G'$  besitzt  $L'$ -Listenfärbung  $\Rightarrow$  Eine Farbe ( $\gamma$  oder  $\delta$ ) bleibt für  $z$  übrig ( $c(w) \in \{\gamma, \delta\}$  ist möglich).  $\square$

**Beispiel 8.33** Es existiert ein planarer 3-färbbarer Graph, der nicht 4-listenfärbbar ist:



$4 \cdot 4 = 16$  Kopien des obigen Graphen für  $\alpha \in \{5, 6, 7, 8\}$  und  $\beta \in \{9, 10, 11, 12\}$ . Verkleben aller oberen Knoten und aller unteren Knoten  $\Rightarrow$  gesuchter Graph.

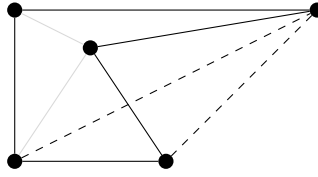


◇

## 8.4 Polygone

**Definition 8.34 (Polygon)** Polygon = planare Einbettung eines  $C_n$ ,  $n \geq 3$  mit geraden Kanten

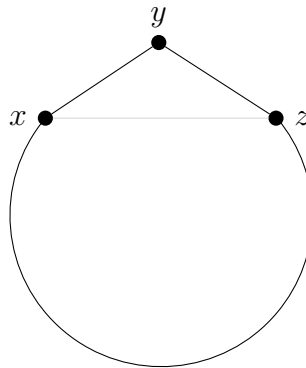
**Definition 8.35 (Polygontriangulierung)** Polygontriangulierung = *Triangulierung* der inneren Facette eines Polygons mit geraden Kanten, die ganz im Inneren verlaufen (ohne die planare Einbettung des Polygons zu ändern)



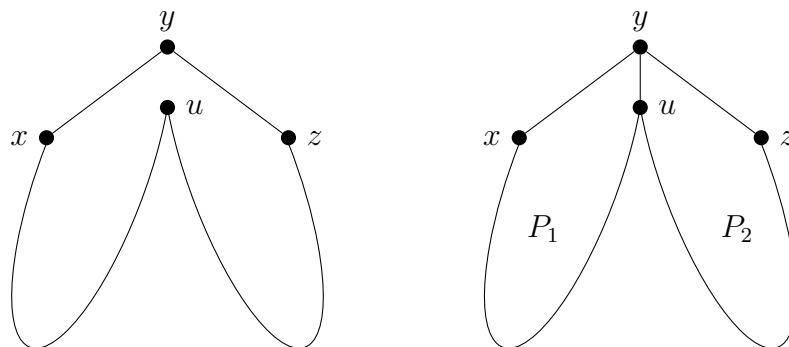
**Satz 8.36** Jedes Polygon besitzt eine Polygontriangulierung.

*Beweis:* Seien  $x, y, z$  Punkte mit  $xy, yz \in E$  und Winkel  $< 180^\circ$  bei  $y$  ("nach Innen").

1. Fall:



2. Fall:  $\exists u$  im Inneren des Dreiecks  $\Delta(x, y, z)$ .  $\mathbb{E}$  sei  $u$  im Inneren mit minimalem euklidischen Abstand zu den Kanten  $xy$  und  $yz$ . Zeichne  $yu$  ein.

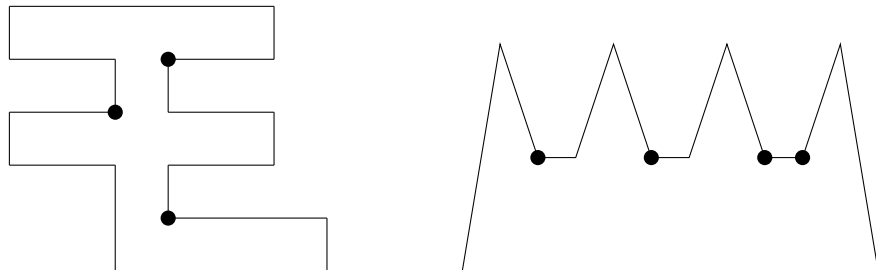


□

**Definition 8.37 (Wächtermenge)**  $W \subseteq V$  bildet Wächtermenge eines Polygons  $G = (V, E)$  falls jeder Punkt im Inneren des Polygons durch eine gerade Strecke ohne Schnitt mit  $E$  mit einem Knoten aus  $W$  verbunden werden kann. Elemente  $W =$  Wächter.

**Beispiele 8.38**

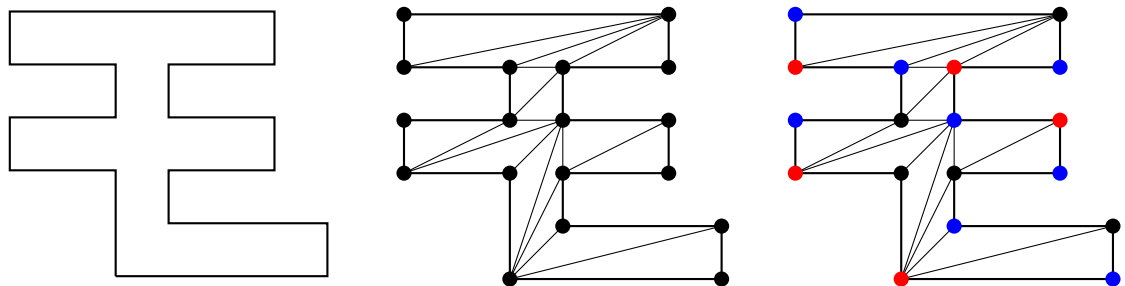
“Nachts im Museum”



◇

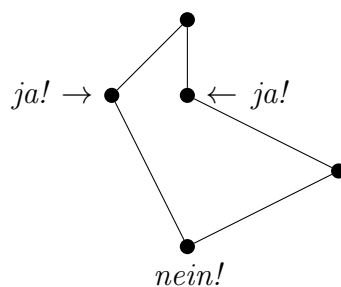
**Satz 8.39 (Chvatal 1973)** Jedes Polygon der Länge  $n$  besitzt eine Wächtermenge  $W$  mit  $|W| \leq \frac{n}{3}$ .

*Beweis:* Wir betrachten eine Polygontriangulierung des Polygons.



Wir können diese mit 3 Farben färben (2 Farben des vorhergehenden Dreiecks bestimmen die 3 Farben im aktuellen Dreieck). Jedes Dreieck ist mit 3 Farben gefärbt und jeder Knoten des Dreiecks ist ein Wächter für dieses Dreieck. Für jede Farbe gilt: Die Knoten einer Farbe bilden eine Wächtermenge des Polygons. □

**Korollar 8.40** Jedes Polygon mit  $\leq 5$  Knoten besitzt Wächtermenge bestehend aus nur einem Wächter  $w$ . Außerdem:  $w$  liegt nur auf Geraden, die durch die eigene Kante definiert werden.

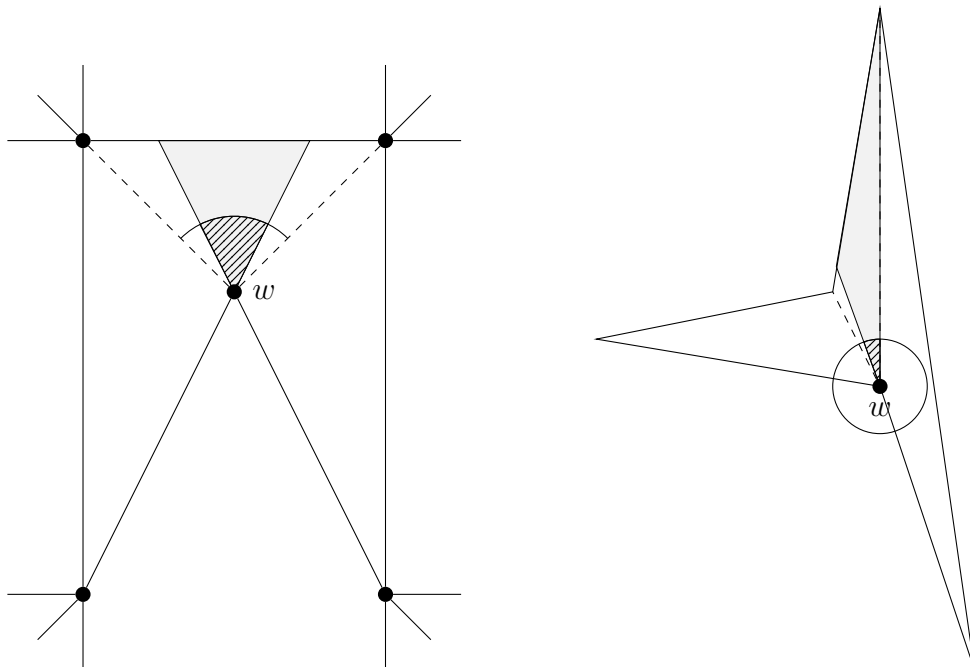


*Beweis:*  $1 = \lfloor \frac{5}{3} \rfloor$ , siehe Triangulierung. □

**Satz 8.41 (Wagner 1936, Fáry 1948 (+ Stein 1951))** *Jeder planare Graph besitzt eine planare Einbettung mit geraden Kanten.*



*Beweis:* Wir zeigen, jede planare Einbettung lässt sich mit geraden Kanten zeichnen (wir dürfen Knoten verschieben aber dabei keine Kanten überqueren). Sei  $G$  zusammenhängend und trianguliert.  $n \leq 3$  ✓. Sei jetzt  $n > 3$ . Dann gilt  $d_x \geq 3$  (wegen  $G$  trianguliert). Es existieren mindestens 4 Knoten mit Grad  $d_x \leq 5$  (Gewicht  $6 - d_x$  für Knoten  $x$ , Gesamtgewicht 12  $\Rightarrow$  mindestens 4 Knoten mit Gewicht  $> 0$ ). Seien  $\{a, b, c\}$  die Knoten auf der äußeren Facette und sei  $x \notin \{a, b, c\}$  mit  $d_x \leq 5$ . Sei  $G'$  der Graph, der aus  $G - x$  durch Triangulation entsteht. Induktiv besitzt  $G'$  eine planare Einbettung mit geraden Kanten  $\Rightarrow G - x$  besitzt eine planare Einbettung mit geraden Kanten. Betrachte die Facette in  $G - x$  um  $x$ . Die Länge dieser Facette ist  $d_x \leq 5$ . Voriges Korollar 8.40 liefert Wächter  $w$  ( $w$  liegt an allen Sehnen, die wir in  $G'$  neu eingezeichnet haben). Wir platzieren  $x$  innerhalb der Facette “ganz in der Nähe” von  $w$  und können nun  $x$  mit allen seinen Nachbarn mit geraden Kanten verbinden.



Sei  $\delta > 0$  so, dass die Kreisfläche  $K_\delta(w)$  um den Punkt  $w$  mit Radius  $\delta$  nur die Geraden schneidet, die durch die Kanten der Facette an  $w$  definiert werden. Wir positionieren  $x$  in “Halbebene 1 an  $w$ ”  $\cap$  “Halbebene 2 an  $w$ ”  $\cap K_\delta(w)$ . □

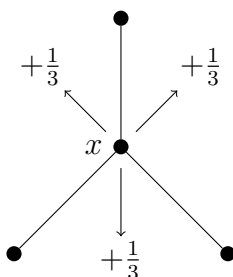
## 8.5 Der Satz von Grötzsch

**Lemma 8.42** *In jedem zusammenhängenden planaren Graphen  $G$  mit Minimalgrad  $\delta(G) \geq 3$  gibt es mindestens vier Facetten der Länge  $\leq 5$ .*

*Beweis: Charging:* Jeder Knoten  $x$  erhält das Gewicht  $4 - d_x$ , jede Facette  $g$  das Gewicht  $4 - \ell_g$ . Das Gesamtgewicht ist damit

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V} (4 - d_x) + \sum_{g \in F} (4 - \ell_g) &= 4n - \underbrace{\sum_{x \in V} d_x}_{2e} + 4f - \underbrace{\sum_{g \in F} \ell_g}_{2e} \\ &= 4n - 4e + 4f \\ &= 8 > 0 \end{aligned}$$

*Discharging:* Jeder Knoten  $x$  mit Grad  $d_x = 3$  gibt  $\frac{1}{3}$  an jede anliegende Facette ab (mit Vielfachheiten). Dies betrifft gerade alle Knoten mit positivem Gewicht.



Alle Knoten haben nach dem Discharging ein Gewicht  $\leq 0$ . Für jede Facette  $g$  gilt  $\text{Gewicht}(g) \leq 4 - \ell_g + \frac{\ell_g}{3} = 4 - \frac{2\ell_g}{3} \leq 2$ , weil  $\ell_g \geq 3$  ist. Da das Gesamtgewicht 8 beträgt, existieren mindestens vier Facetten  $g$  mit positivem Gewicht. Es gilt  $0 < 4 - \frac{2\ell_g}{3}$ , woraus  $\ell_g \leq 5$  folgt.  $\square$

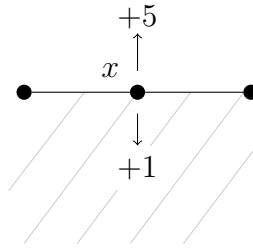
**Lemma 8.43** *Sei  $G$  zusammenhängend, planar,  $\delta(G) \geq 2$ . Sei  $C$  der Rand der äußeren Facette  $g_0$ ,  $\ell_{g_0} \leq 6$ ,  $d_x \geq 3$  für alle  $x \notin C$ ,  $G \neq C$ . Dann besitzt  $G$  eine Facette  $g \neq g_0$  mit  $\ell_g \leq 4$  oder  $\ell_g = 5$ , Rand  $(x_1, \dots, x_5)$  mit  $d_{x_i} = 3$ ,  $x_i \notin C$  für alle  $1 \leq i \leq 4$ .*

*Beweis: Charging:* Jeder Knoten  $x$  erhält das Gewicht  $12 - 3d_x$ , die äußere Facette  $g_0$  erhält das Gewicht  $-11 - 3\ell_{g_0}$ . Alle Facetten  $g \neq g_0$  erhalten das Gewicht  $12 - 3\ell_g$ . Für das Gesamtgewicht gilt

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V} (12 - 3d_x) - 11 - 3\ell_{g_0} + \sum_{g \in F \setminus \{g_0\}} (12 - 3\ell_g) &= 12n - 6e - 11 + 12(f - 1) - 6e \\ &= \underbrace{12n - 12e + 12f}_{24} - 23 \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

*Discharging:* Jeder Knoten  $x \notin C$  mit  $d_x = 3$  gibt  $+1$  an jede anliegende Facette (mit Vielfachheiten).  $x \in C$  mit  $d_x = 3$  gibt  $+3$  an die äußere Facette weiter.  $x \in C$  mit  $d_x = 2$  gibt  $+5$  an die äußere Facette,  $+1$  an die andere Facette.

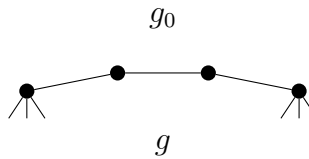




Alle Knoten haben Gewicht  $\leq 0$ ,  $g_0$  hat Gewicht  $\leq 0$ :

$$\begin{aligned}
 \text{Gewicht}(g_0) &\leq -11 - 3\ell_{g_0} + \underbrace{5(\ell_{g_0} - 1) + 3}_{\substack{\text{mindestens 1 Knoten mit} \\ d_x \geq 3, \text{ da } C \neq G \text{ und } G \\ \text{zsh.}}} \\
 &= -8 + 2\ell_{g_0} - 5 \\
 &= -13 + 2\ell_{g_0} < 0
 \end{aligned}$$

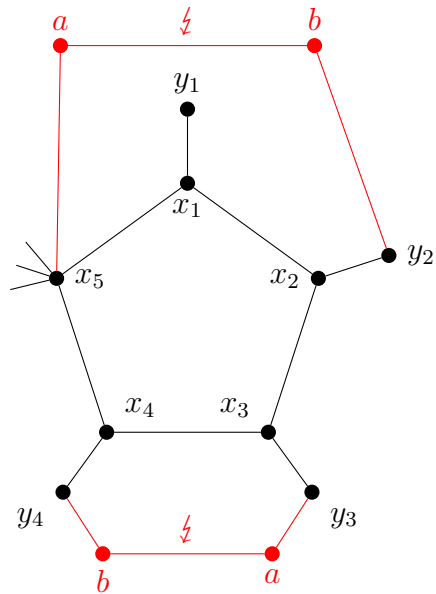
Daher existiert eine Facette  $g \neq g_0$  mit Gewicht  $> 0$ :  $0 < \text{Gewicht}(g) \leq 12 - 3\ell_g + \ell_g = 12 - 2\ell_g \Rightarrow \ell_g \leq 5$ . Falls  $\ell_g \leq 4$  sind wir fertig. Sei also  $\ell_g = 5$  mit dem Startgewicht  $-3 \Rightarrow g$  hat 4-mal Gewicht  $+1$  bekommen.



Keiner von diesen Knoten liegt auf  $C$  und hat Grad 2  $\Rightarrow$  alle Knoten, die  $g$  Gewicht geben, liegen nicht auf  $C$  und haben Grad 3.  $\square$

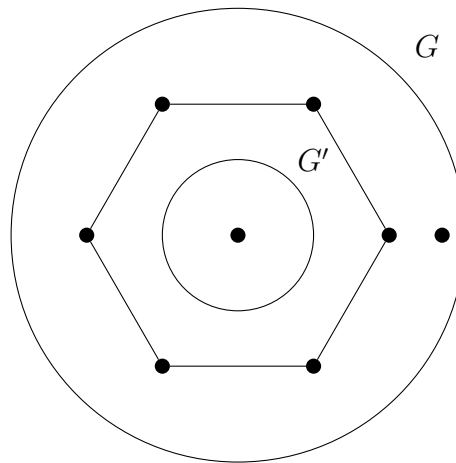
**Definition 8.44 (harmlos)** Eine Facette der Länge 5 mit Rand  $(x_1, \dots, x_5)$  ist harmlos, falls

- $\forall 1 \leq i \leq 4: d_{x_i} = 3$  und  $x_i$  liegt nicht auf der äußeren Facette
- Sei  $y_i$  für  $1 \leq i \leq 4$  der verbleibende Nachbar von  $x_i$  außerhalb von  $x_1, \dots, x_5$
- $y_i$  alle verschieden und nicht durch eine Kante verbunden
- kein Pfad  $x_5 a b y_2$  in  $G - \{x_1, \dots, x_4\}$
- kein Pfad  $y_3 a b y_4$  in  $G - \{x_1, \dots, x_4\}$

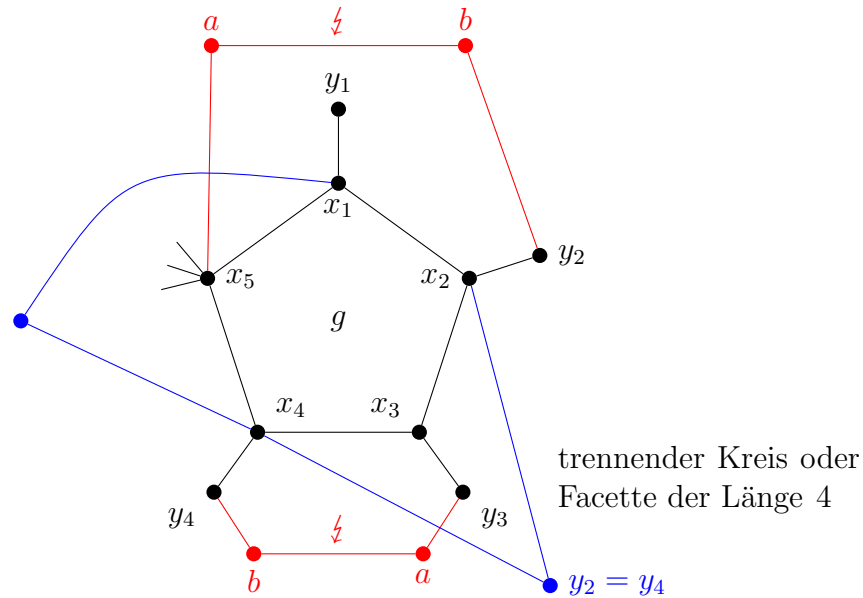


**Lemma 8.45** Sei  $G$  dreiecksfrei, planar, zusammenhängend und  $\text{seid}(G) \geq 3$ . Dann besitzt  $G$  eine Facette der Länge 4 oder eine Facette der Länge 6 oder eine harmlose Facette der Länge 5.

*Beweis:*  $\text{C}$   $G$  besitzt keine Facette der Länge 4 oder 6. Nach Lemme 8.42 können wir annehmen, dass die äußere Facette die Länge  $\leq 5$  hat (“Kugeloberfläche”).



Wenn  $G$  einen trennenden Kreis  $C$  der Länge  $\leq 6$  besitzt, dann  $G' = C \cup \text{Inneres von } C$ .  $\text{C}$  äußere Facette hat Länge  $\leq 6$  und Rand  $C$ ,  $d_x \geq 3$  für alle  $x \notin C$ ,  $\delta(G) \geq 2$ , keine trennenden Kreise der Länge  $\leq 6$ ; Alle Facetten haben Länge 5 oder  $\geq 7$ . Nach Lemma 8.43 existiert eine Facette  $g$  der Länge 5 mit Rand  $(x_1, \dots, x_5)$ ,  $d_{x_i} = 3, x_i \notin C$  für alle  $1 \leq i \leq 4$ .

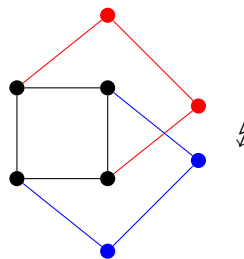


Alle  $y_i$  sind verschieden und nicht verbunden in  $E$ . Es gibt keinen Pfad  $x_5aby_2$  oder  $y_3aby_4$ , also ist  $g$  harmlos.  $\square$

**Satz 8.46 (Grötzsch 1959)** *Dreiecksfreie planare Graphen sind 3-färbbar.*

*Beweis (nach Dvořák, Kawarabayashi, Thomas 2009):* Induktion nach  $|V|$

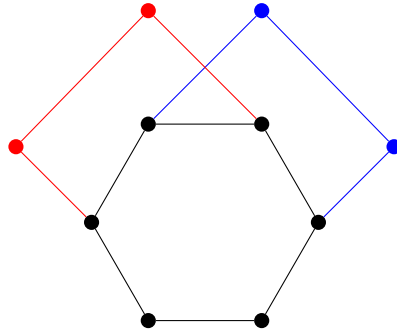
- Ist  $G$  nicht zusammenhängend, dann betrachte Zusammenhangskomponenten einzeln.  $\mathbb{E} G$  zusammenhängend.
- $\exists x \in V: d_x \leq 2$ . Färbe  $G - x$  induktiv, eine Farbe bleibt für  $x$  übrig.  $\mathbb{E} \delta(G) \geq 3$ .
- Facette  $(x_1, \dots, x_4)$ :



$\mathbb{E} x_1abx_3$  existiert nicht.  $G'$  entsteht aus  $G$  durch das Verschmelzen von  $x_1$  und  $x_3$  (bei Mehrfachkanten entscheiden wir uns für eine). 3-Färbung von  $G'$  liefert 3-Färbung von  $G$ .

- Facette  $(x_1, \dots, x_6)$ :  $\mathbb{E} x_1abx_3$  existiert nicht. Verschmelzen von  $x_1$  und  $x_3$ .

## 8 Planare Graphen



- harmlose Facette  $(x_1, \dots, x_5)$  nach Lemma 8.45. Verschmelze  $y_1$  mit  $x_5$  und  $y_3$  mit  $y_4$  in  $G \setminus \{x_1, \dots, x_4\}$

□

# 9 Gradsequenzen

TODO

Erdős-Gallai Thm.

# 10 Einige Graphparameter

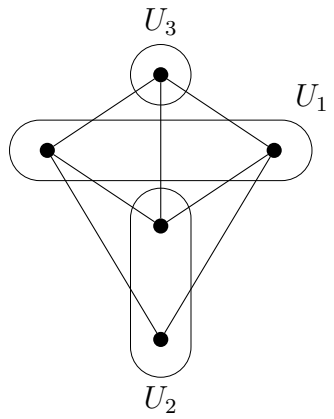
TODO: Zusammenhang, einfache Sätze dazu

**Definition 10.1 (Clique, unabhängige Menge)** Eine Clique eines Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Menge von Knoten  $C \subseteq V$  mit  $G[C] = K_n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Eine unabhängige Menge ist eine Menge von Knoten  $U \subseteq V$  mit  $G[U] = \overline{K_n}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

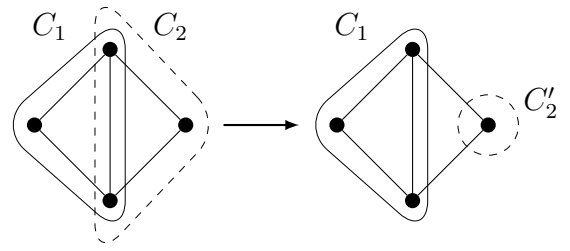
**Definition 10.2 (Kantenüberdeckung, Knotenüberdeckung, Matching)** Eine Kantenüberdeckung ist eine Menge  $D \subseteq E$  von Kanten mit  $\forall x \in V \exists e \in D : x \in e$ . Eine Knotenüberdeckung (Träger) ist eine Menge  $T \subseteq V$  von Knoten mit  $\forall e \in E \exists x \in T : x \in e$ . Ein Matching ist eine Menge  $M \subseteq E$  von Kanten mit  $\forall d, e \in M : d \neq e \Rightarrow d \cap e = \emptyset$ .

- $\omega(G)$  = Cliquenzahl = Größe einer größten Clique
- $\alpha(G)$  = Unabhängigkeitszahl = Größe einer größten unabhängigen Menge
- $\kappa(G)$  = Cliquenüberdeckungsanzahl = minimale Anzahl von Cliquen  $C_1, \dots, C_\ell$  mit  $V = C_1 \cup \dots \cup C_\ell$  ( $\forall C_1, \dots, C_\ell$  sind disjunkt)
- $\chi(G)$  = Färbungszahl = minimale Anzahl von unabhängigen Mengen  $U_1, \dots, U_\ell$  mit  $V = U_1 \cup \dots \cup U_\ell$  ( $\forall U_1, \dots, U_\ell$  sind disjunkt)
- $\eta(G)$  = Kantenüberdeckungsanzahl = minimale Größe einer Kantenüberdeckung
- $\tau(G)$  = Knotenüberdeckungsanzahl = minimale Größe einer Knotenüberdeckung
- $\mu(G)$  = Matchingzahl = maximale Größe eines Matchings
- $\Delta(G) = \max \{d_x \mid x \in V\}$ ,  $\delta(G) = \min \{d_x \mid x \in V\}$
- $g(G)$  = Tailenweite von  $G$  = minimale Länge eines Kreises, der ein Untergraph von  $G$  ist

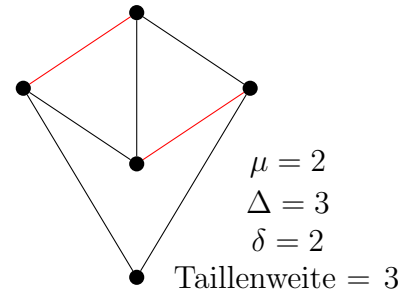
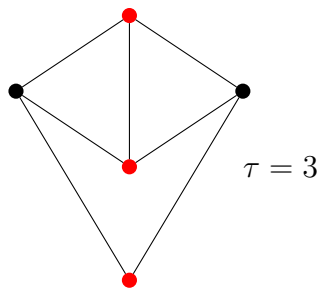
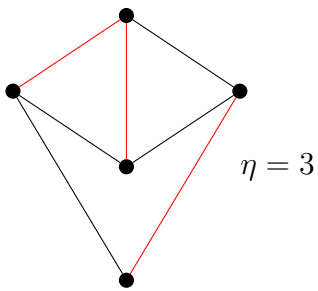
## Beispiele 10.3



$\omega = 3$   
 $\alpha = 2$   
 $\kappa = 2$   
 $\chi = 3$



falls  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ , setze  $C_2' = C_2 \setminus C_1$



◇

**Satz 10.4**

- (a)  $\omega(G) \leq \chi(G)$
- (b)  $\alpha(G) \leq \kappa(G)$
- (c)  $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$
- (d)  $\chi(G) = \kappa(\overline{G})$
- (e)  $\kappa(G) \geq \frac{n}{\omega(G)}$
- (f)  $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$
- (g)  $\alpha(G) + \tau(G) = n$
- (h)  $\delta(G) \geq 1 \Rightarrow \mu(G) + \eta(G) = n$

*Beweis:* (a), (b), (c), (d), (e) und (f) sind klar.

(g): Wir zeigen zunächst  $\alpha(G) + \tau(G) \leq n$ . Sei  $U \subseteq V$  eine größte unabhängige Menge, damit ist  $V \setminus U$  eine Knotenüberdeckung und  $\tau(G) \leq |V \setminus U|$ . Daraus folgt  $\alpha(G) + \tau(G) \leq \alpha(G) + |V \setminus U| = |U| + |V \setminus U| = |V| = n$ . Nun zeigen wir  $\alpha(G) + \tau(G) \geq n$ . Sei  $T \subseteq V$  ein minimaler Träger, daraus folgt  $V \setminus T$  ist unabhängige Menge und  $\alpha(G) \geq |V \setminus T|$ . Daraus folgt  $\alpha(G) + \tau(G) = \alpha(G) + |T| \geq |V \setminus T| + |T| = |V| = n$ .

(h): Wir zeigen zunächst  $\mu(G) + \eta(G) \geq n$ . Sei  $D \subseteq E$  eine kleinste Kantenüberdeckung, d.h.  $|D| = \eta(G)$ . Dann hat  $G' = (V, D)$  keine isolierten Knoten. Jede Zsh-Komponente von  $G'$  ist ein Baum. Damit ist  $|D| = |V| - k$ , wobei  $k$  die Anzahl der Zsh-Komponenten.  $M$  bestehe aus je einer Kante aus jeder Zsh-Komponente von  $G'$ . Es gilt  $\mu(G) \geq |M| = k$ , woraus  $\mu(G) + \eta(G) = \mu(G) + |D| \geq k + |D| = n$  folgt. Jetzt zeigen wir  $\mu(G) + \eta(G) \leq n$ . Sei  $M \subseteq E$  ein maximales Matching. Sei  $U$  die Menge der Knoten, die zu keiner Kante aus dem Matching  $M$  gehören. Die Menge  $U$  ist unabhängig. Es gilt  $2|M| + |U| = |V|$ . Wir wählen uns zu jedem Knoten aus  $U$  eine Kante (möglich wegen  $\delta(G) \geq 1$ ). Diese Kanten bilden zusammen mit den Matchingkanten eine Kantenüberdeckung,  $\eta(G) \leq |M| + |U|$ . Es folgt  $\mu(G) + \eta(G) = |M| + \eta(G) \leq |M| + |M| + |U| = 2|M| + |U| = |V| = n$ .  $\square$

**Satz 10.5 (Brooks, 1941)** *Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph mit Maximalgrad  $\Delta$  und Färbungszahl  $\chi$ , der kein vollständiger Graph ist und kein Kreis ungerader Länge. Dann ist  $\chi \leq \Delta$ .*

*Beweis:* Im Fall  $n \leq 2$  ist die Aussage schnell überprüft. Sei also  $n > 2$ . Ist  $\Delta = 2$ , dann ist  $G$  ein Pfad oder ein Kreis gerader Länge, also ist  $\Delta = 2 \geq \chi$ .

a)  $\mathbb{E}$  sei also  $\Delta \geq 3$ .

Sei  $x \in V$  und  $H = G - x$ . Behauptung:  $H$  lässt sich mit  $\Delta(G)$  Farben färben. Beweis der Behauptung:  $\mathbb{E}$  sei  $H$  zusammenhängend, sonst lassen sich die Zusammenhangskomponenten einzeln färben. Außerdem ist  $H \neq K_m$ , denn sonst wäre  $\Delta(H) = m - 1 \leq \Delta(G) - 1$ , denn  $x$  hat mindestens einen Nachbarn in  $H$ . Aus demselben Grund ist  $H \neq C_{2m+1}$ , denn es wäre  $\Delta(H) = 2 = \Delta(G) - 1$ .

Ist  $d_x < \Delta(G)$ , dann lässt die Färbung von  $H$  eine Farbe für  $x$  übrig und liefert so eine Färbung von  $G$ .

b)  $\mathbb{E}$  sei also  $d_x = \Delta(G)$ .

Wir bezeichnen mit  $y_1, \dots, y_\Delta$  die Nachbarn von  $x$ .  $\mathbb{E}$  seien sie alle unterschiedlich gefärbt, sonst bliebe wie oben eine Farbe für  $x$ .  $\mathbb{E}$  hat  $y_i$  die Farbe  $i$ , sonst nummerieren wir sie entsprechend. Sei  $C_{i,j}$  der induzierte Untergraph von  $G$  bestehend aus allen Knoten der Farben  $i, j$ , die von  $y_i, y_j$  aus über Knoten dieser zwei Farben erreichbar sind.

c)  $\mathbb{E}$  liegen  $y_i$  und  $y_j$  in der gleichen Zusammenhangskomponente von  $C_{i,j}$ .

Andernfalls vertauschen wir die Farben  $i, j$  in der Komponente von  $y_i$ , dann haben zwei Nachbarn von  $x$  dieselbe Farbe.

d)  $\mathbb{E}$  gelte:  $C_{i,j}$  ist Pfad von  $y_i$  nach  $y_j$ .



Dass ein solcher Pfad  $P$  existiert ist klar nach **c)**. Beweis: Angenommen  $P \neq C_{i,j}$ .

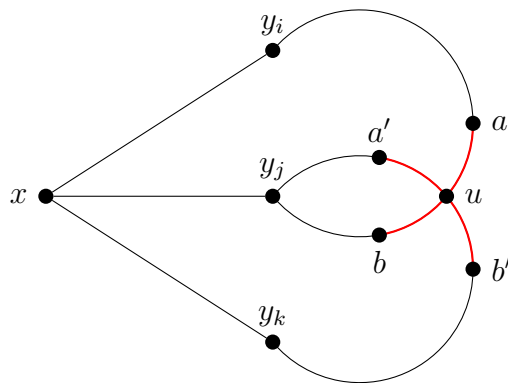
**1. Fall:**  $P = y_i y_j$

Es sei  $y_i a$  eine Kante in  $C_{i,j}$  mit  $a \neq y_j$ . Es ist  $d_{y_i} \leq \Delta(G) - 1$  und unter den Nachbarn von  $y_i$  haben  $a$  und  $y_j$  die Farbe  $j$ . Die Nachbarn brauchen also insgesamt  $\Delta(G) - 2$  Farben,  $y_i$  kann daher mit einer freien Farbe  $\neq i$  gefärbt werden und  $x$  mit  $i$ .

**2. Fall:**  $P = y_i a_1 \dots a_k y_j$  Sei  $\ell$  minimal mit  $d_{a_\ell} > 2$  in  $C_{i,j}$ . Dann hat  $a_\ell$  drei gleichfarbige Nachbarn, kann also mit einer dritten Farbe  $\neq i, j$  gefärbt werden. Das wäre ein Widerspruch zu **c)**.

e) Es schneiden sich die Wege  $C_{i,j}$  und  $C_{j,k}$  für verschiedene  $i, j, k$  nur in  $y_j$ .

Angenommen es gäbe einen anderen Schnittpunkt  $u \neq y_j$ , dann hat  $u$  trotzdem die Farbe  $j$  und es ergibt sich folgendes Bild:

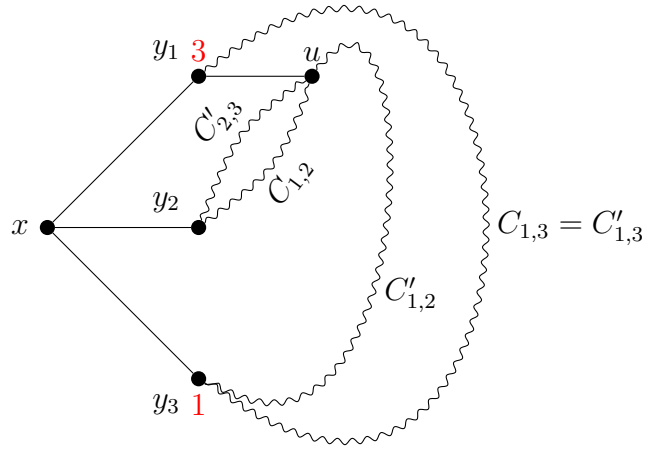


$a, b$  bzw.  $a', b'$  bezeichnen dabei die beiden Nachbarn von  $u$  in  $C_{i,j}$  bzw. in  $C_{j,k}$ . Weil  $a, b$  beide mit  $i$  gefärbt sind, und  $a', b'$  mit  $k$ , bleiben für die restlichen Nachbarn noch  $\Delta - 2$  Farben übrig, was einen Widerspruch zu **c)** liefert.

f) Es existieren Indizes  $i \neq j$  so, dass  $y_i y_j \notin E$ .

Andernfalls wäre  $N(y_i) \supseteq \{x\} \cup \{v_j \mid j \neq i\}$  und somit  $\Delta \geq |N(y_i)| \geq \Delta$ , also ist  $N(y_i) = \{x\} \cup \{v_j \mid j \neq i\}$ . Damit ist aber  $G = (\{x, y_1, \dots, y_\Delta\}, \binom{V}{2}) = K_{\Delta+1}$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Es wählen wir  $y_i y_j = y_1 y_2 \notin E$ . Dann existiert ein Nachbar  $u \neq y_2$  von  $y_1$  auf  $C_{1,2}$ , und es ist  $c(u) = 2$ . Wir vertauschen die Farben 1 und 3 auf dem Pfad  $C_{1,3}$ . Dies liefert eine Färbung  $c'$  mit  $c'(y_1) = 3, c'(y_3) = 1$ . Es nehmen wir an,  $c'$  erfüllt **b), c), e), d)**.  $u \in C'_{1,2} \cap C'_{2,3}$ , im Widerspruch zu **e)**. Also ist  $\chi \leq \Delta$ .



□

# 11 Perfekte Graphen

Es sei  $|G|$  die Anzahl an Knoten eines Graphen  $G$ .

$G$  ist perfekt  $\Leftrightarrow$  für jeden induzierten Untergraph  $H \leq G$  gilt  $\chi(H) = \omega(H)$

## Beispiel 11.1

- $K_n$  ist perfekt
- bipartite Graphen sind perfekt
- Cographen sind perfekt
- $C_n$  mit  $n \geq 5$  und  $n$  ungerade ist nicht perfekt ( $\chi = 3, \omega = 2$ )

◇

## Satz 11.2 (Starker Hauptsatz für perfekte Graphen)

$G$  ist perfekt  $\Leftrightarrow$  weder  $G$  noch  $\overline{G}$  enthält einen induzierten  $C_n$   
mit  $n \geq 5$  und  $n$  ungerade

**Bemerkung 11.3** *Der Originalbeweis von Chudrovsky, Robertson, Seymour und Thomas (2006) ist ungefähr 180 Seiten lang.*

## Satz 11.4 (Hauptsatz für perfekte Graphen, Lovász 1972)

$G$  ist perfekt  $\Leftrightarrow \overline{G}$  ist perfekt

Wir beweisen folgende stärkere Aussage, die symmetrisch in  $G$  und  $\overline{G}$  ist.

## Satz 11.5 (Lovász 1972)

$G$  perfekt  $\Leftrightarrow |H| \leq \omega(H) \cdot \omega(\overline{H})$  für alle induzierten Untergraphen  $H \leq G$

**Bemerkung 11.6** *Der Originalbeweis ist knapp über 3 Seiten lang.*

*Beweis:* Erinnerung  $\omega(\overline{H}) = \alpha(H)$ . “ $\Rightarrow$ ”: Sei  $G$  perfekt und  $H \leq G$  induziert. Dann  $\chi(H) = \omega(H)$ . Jede der  $\omega(H)$  vielen Farbklassen hat  $\leq \alpha(H)$  viele Knoten  $\Rightarrow |H| \leq \omega(H) \cdot \alpha(H)$ . “ $\Leftarrow$ ”: Sei  $G = (V, E)$  ein Graph, der die Bedingung auf der rechten Seite erfüllt.  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\omega := \omega(G)$ ,  $\alpha := \alpha(G)$ . Induktion nach  $n$ :  $n = 1$   $\checkmark$ . Sei  $n > 1$ . Angenommen  $G$  ist nicht perfekt. Nach Induktionsvoraussetzung ist jeder echte induzierte Untergraph von  $G$  perfekt. Für alle  $U \subseteq V$ ,  $U \neq \emptyset$  unabhängig gilt

$$\chi(G - U) \stackrel{IV}{=} \omega(G - U) \stackrel{(*)}{=} \omega \quad (11.1)$$

Bei der Aussage (\*) ist  $\leq$  klar. Weiter gilt  $\chi(G - U) < \omega \Rightarrow \chi(G) \leq \omega \Rightarrow G$  perfekt. Sei  $W$  die Knotenmenge eines beliebigen  $K_\omega$  in  $G$  und  $y \in V$ . Dann:

$$y \notin W \Rightarrow W \text{ trifft jede Farbklassse von } G - y \quad (11.2)$$

$$y \in W \Rightarrow W \text{ trifft genau eine Farbklassse von } G - y \text{ nicht} \quad (11.3)$$

$A_0 = \{y_1, \dots, y_\alpha\} \subseteq V$  unabhängige Menge der Größe  $\alpha$ .

$A_1, \dots, A_\omega$  Farbklassen einer  $\omega$ -Färbung von  $G - y_1$

$A_{\omega+1}, \dots, A_{2\omega}$  Farbklassen einer  $\omega$ -Färbung von  $G - y_2$

$A_{(\alpha-1)\omega+1}, \dots, A_{\alpha\omega}$  Farbklassen einer  $\omega$ -Färbung von  $G - y_\alpha$

Insgesamt  $\alpha\omega + 1$  viele unabhängige Knotenmengen  $A_i$ . Nach (11.1) existiert für alle  $0 \leq i \leq \alpha\omega$  ein  $K_\omega \leq G - A_i$  mit Knotenmenge  $W_i$ . Sei  $W$  die Knotenmenge eines  $K_\omega$  in  $G$ . Dann gilt

$$\text{Es existiert genau ein } i \in \{0, \dots, \alpha\omega\} \text{ mit } W \cap A_i = \emptyset \quad (11.4)$$

Denn  $W \cap A_0 = \emptyset \Rightarrow W \cap A_i \neq \emptyset$  für alle  $i \neq 0$  nach (11.2).  $W \cap A_0 \neq \emptyset \Rightarrow W \cap A_0 = \{y_i\}$  für ein  $i$

$$\Rightarrow \begin{cases} W \cap A_j \neq \emptyset & \text{für alle } j \notin \{(i-1)\omega + 1, \dots, i\omega\} \text{ nach (11.2)} \\ W \cap A_j = \emptyset & \text{für genau ein } j \in \{(i-1)\omega + 1, \dots, i\omega\} \text{ nach (11.3)} \end{cases}$$

Wir definieren 3 Matrizen über  $\mathbb{R}$ .  $A = (a_{ij})$  ist  $(\alpha\omega + 1) \times n$ -Matrix mit

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } x_j \in A_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$B = (b_{ij})$  ist  $n \times (\alpha\omega + 1)$ -Matrix mit

$$b_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } x_i \in W_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$C = (c_{ij})$  ist  $(\alpha\omega + 1) \times (\alpha\omega + 1)$ -Matrix mit

$$c_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \neq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt  $A \cdot B = C$ , denn

$$\begin{aligned} \sum_k a_{ik} b_{kj} &= |A_i \cap W_j| \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } i = j \text{ nach Definition der } W_i \\ 1 & \text{für } i \neq j \text{ nach (11.4)} \end{cases} \\ &= c_{ij} \end{aligned}$$

$C$  ist invertierbar  $\Rightarrow A$  hat Rang  $\geq \alpha\omega + 1 \Rightarrow n \geq \alpha\omega + 1$  im Widerspruch zu  $|G| \leq \omega\alpha$ . Also ist  $G$  perfekt.  $\square$

## 11.1 Der Heiratssatz

Matching  $M \subseteq E$  mit disjunkten Endknoten, d.h.  $e \cap f = \emptyset$  für alle  $e, f \in M$  mit  $e \neq f$ .  $M$  *perfekt* für  $A$  in  $G = (A \dot{\cup} B, E)$  und  $E \subseteq A \times B$ , falls  $\forall a \in A \exists e \in M : a \in e$ .

**Satz 11.7 (Heiratssatz, Hall 1935)** Sei  $G = (A \dot{\cup} B, E)$  mit  $E \subseteq A \times B$  bipartit. Dann gilt

$$G \text{ besitzt ein perfektes Matching für } A \Leftrightarrow \underbrace{\forall S \subseteq A: |N(S)| \geq |S|}_{\text{Heiratsbedingung}}$$

wobei  $N(S) = \{y \mid \exists x \in S: xy \in E\}$

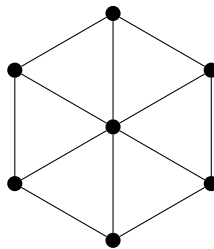
*Beweis:* " $\Rightarrow$ ": klar, denn  $(A \dot{\cup} B, M)$  erfüllt bereits die Heiratsbedingung, also auch  $(A \dot{\cup} B, E)$ , da  $M \subseteq E$ . " $\Leftarrow$ ":  $B$  ist maximale unabhängige Menge, denn sei  $A' \cup B'$  eine unabhängige Menge mit  $A' \subseteq A$ ,  $B' \subseteq B$ . Dann ist auch  $N(A') \cup B'$  unabhängig.  $|N(A') \cup B'| = |N(A')| + |B'| \stackrel{\text{Heiratsbed.}}{\geq} |A' \cup B'|$ . Also ist  $B$  unabhängige Menge maximaler Größe.  $G$  perfekt  $\Rightarrow \overline{G}$  perfekt  $\Rightarrow \exists$  Färbung von  $\overline{G}$  mit  $|B|$  vielen Farben  $\Rightarrow \exists$  Cliquenüberdeckung  $N$  mit  $|N| = |B|$ . Die Cliquenüberdeckung  $N$  enthält nur Kanten und isolierte Knoten, wobei jeder nicht-isolierte Knoten aus  $B$  von genau einer Kante aus  $N$  getroffen wird; die Knoten aus  $A$  werden evtl. mehrfach getroffen. Wir wählen für jedes  $a \in A$  genau eine Kante  $e_a \in N$ .  $M = \{e_a \mid a \in A\}$  ist perfektes Matching.  $\square$

# 12 Chordale Graphen

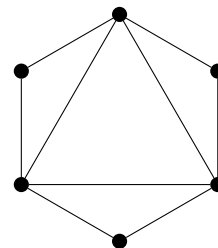
(auch *triangulierte Graphen* oder *Dreiecksgraphen* genannt)

Wir bezeichnen einen Graph  $G$  als *chordal*, wenn jeder einfache Kreis der Länge  $\geq 4$  eine Sehne besitzt. Diese Graphklasse wurde erstmals 1958 von Hajmal und Surányi betrachtet.

## Beispiele 12.1



ist nicht chordal  
(äußerer Kreis hat keine Sehne)

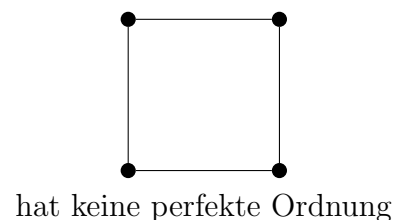
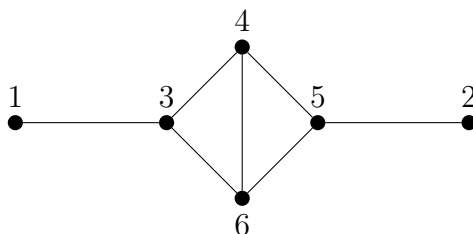


ist chordal

◇

Ein Knoten  $x \in V$  heißt genau dann *simplicial*, wenn  $N(x)$  eine Clique ist. Sei  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Ein Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$  ist genau dann eine *perfekte Ordnung*, wenn  $\forall 1 \leq i \leq n : x_i$  ist simplicial in  $G[x_i, \dots, x_n]$ .

## Beispiele 12.2



hat keine perfekte Ordnung

◇

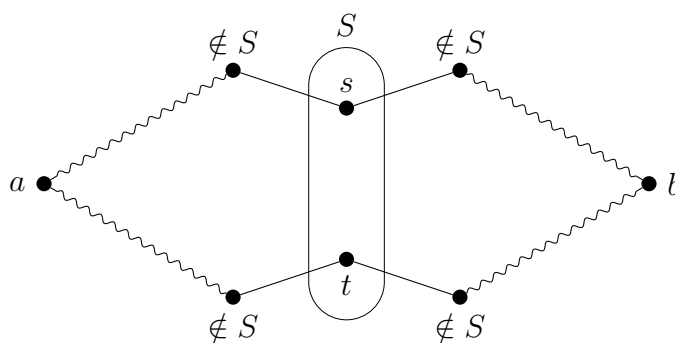
**Lemma 12.3 (Fulkerson, Gross 1965)** *Hat  $G$  eine perfekte Ordnung, so ist  $G$  chordal.*

*Beweis:* Sei  $(x_1, \dots, x_n)$  perfekte Ordnung.  $G[x_2, \dots, x_n]$  ist chordal nach Induktion. Sei  $C$  ein einfacher Kreis der Länge  $\geq 4$  in  $G$ . 1.Fall: Gilt  $x_1 \notin C$ , dann ist  $C$  in  $G[x_2, \dots, x_n]$ . Daraus folgt, dass  $C$  eine Sehne besitzt. 2.Fall: Sei  $x_1 \in C$ . Die Nachbarn  $a, b$  von  $x_1$  auf  $C$  sind insbesondere in  $N(x_1)$ . Da  $N(x_1)$  eine Clique ist, gilt  $ab \in E$  und wir haben eine Sehne in  $C$  gefunden.  $\square$

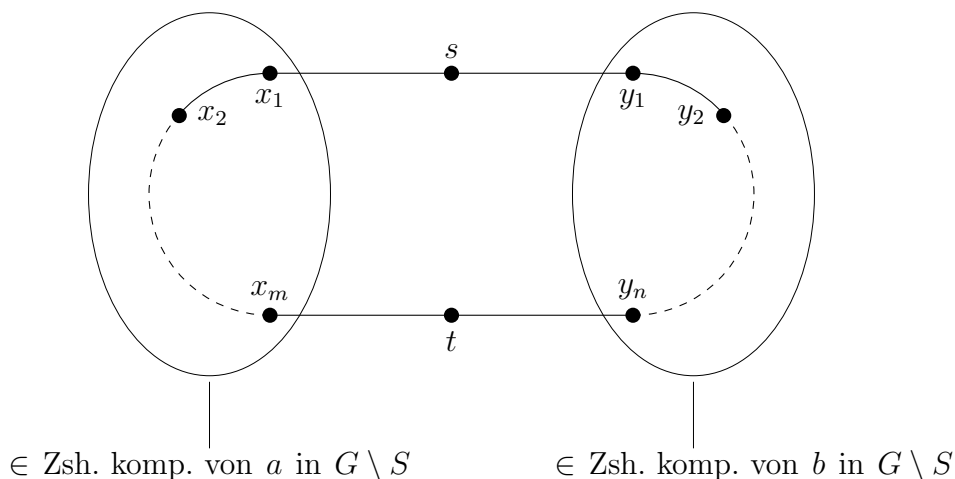
Seien  $a, b \in V$  mit  $ab \notin E$ . Eine Teilmenge von Knoten  $S \subseteq V$  heißt genau dann *Separator* (von  $a, b$ ), wenn  $a$  und  $b$  in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von  $G \setminus S$  liegen. Wir bezeichnen einen Separator  $S$  genau dann als *minimal*, wenn kein Separator  $S' \subsetneq S$  die Knoten  $a$  und  $b$  trennt.

**Lemma 12.4 (Dirac 1961)** *Ist  $G$  chordal, so ist jeder minimale Separator eine Clique.*

*Beweis:* Sei  $G$  zusammenhängend. Seien  $a, b \in V$  und  $ab \notin E$ . Sei  $S$  ein minimaler Separator von  $a, b$ . Seien  $s, t \in S$  mit  $s \neq t$ . Es ist zu zeigen, dass gilt  $st \in E$ .



Wähle  $m, n$  minimal so, dass:



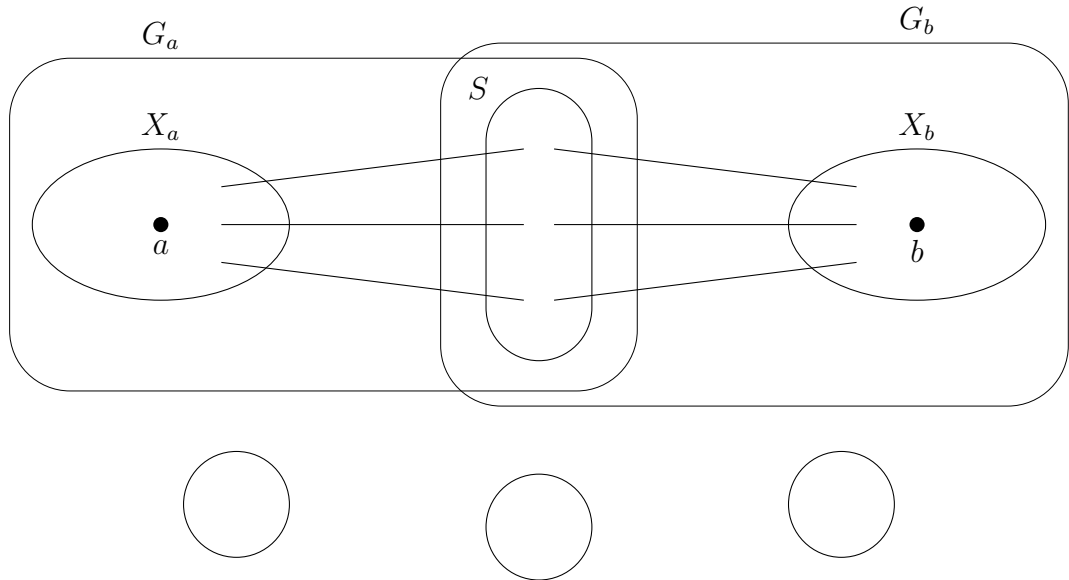
Dies ist ein Kreis der Länge  $\geq 4$ . Da  $S$  Separator ist, gilt  $x_i y_j \notin E$ .

$$\begin{aligned}
 m, n \text{ minimal} &\Leftrightarrow x_i x_j \notin E, y_i y_j \notin E \text{ für } i < j - 1 \\
 &sx_i \notin E, sy_i \notin E \text{ für } i > 1 \\
 &tx_i \notin E \text{ für } i < m \\
 &ty_i \notin E \text{ für } i < n
 \end{aligned}$$

Da  $G$  chordal ist, muss eine Sehne existieren. Die Kante  $st$  ist die einzig mögliche Sehne. Also ist  $st \in E$ .  $\square$

**Lemma 12.5 (Dirac 1961)** *Ist  $G$  nicht vollständig und jeder minimale Separator ist eine Clique, dann gibt es zwei nicht benachbarte simpliziale Knoten  $x, y$ .*

*Beweis:* (E) sei  $G$  zusammenhängend. Seien  $a, b \in V$  mit  $ab \notin E$  und  $S$  minimaler Separator von  $a, b$ . Sei  $X_a$  (bzw.  $X_b$ ) die Zusammenhangskomponente von  $a$  (bzw.  $b$ ) in  $G \setminus S$



Dabei ist  $G_a := G[X_a \cup S]$  und  $G_b := G[X_b \cup S]$ . Jeder Separator in  $G_a$  oder  $G_b$  ist auch ein Separator in  $G$ , da  $S$  vollständig ist (falls  $S'$  ein Separator von  $a'$  und  $b'$  in  $G_a$  ist und ein Weg zwischen  $a'$  und  $b'$  in  $G$  existiert, dann führt dieser Weg über  $S$  und kann deshalb durch eine Kante aus  $S$  abgekürzt werden, so dass ein Weg von  $a'$  zu  $b'$  innerhalb von  $G_a$  übrig bleibt). Falls  $G_a$  vollständig ist, setzen wir  $x := a$ , andernfalls existieren nach Induktionsvoraussetzung simpliziale Knoten  $x_1, x_2$  in  $G_a$  mit  $x_1 x_2 \notin E$ . Es gilt  $x_1 \notin S$  oder  $x_2 \notin S$ . (E) sei  $x_1 \notin S$ . Setze  $x := x_1$ . In jedem Fall ist  $x \in X_a$  simplizial in  $G$ , da  $N(x)$  in der Knotenmenge von  $G_a$  enthalten ist. Analog erhalten wir  $y \in X_b$  simplizial in  $G$ . Es ist  $X_a \times X_b \cap E = \emptyset$ , daher gilt  $xy \notin E$ .  $\square$

**Satz 12.6** *Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:*

- (a)  $G$  ist chordal.
- (b) Jeder minimale Separator ist eine Clique.
- (c) Es existiert eine perfekte Ordnung.

*Beweis:* (a)  $\Rightarrow$  (b) gilt nach Lemma 12.4. (c)  $\Rightarrow$  (a) gilt nach Lemma 12.3. Wir zeigen nun (b)  $\Rightarrow$  (c). Nach Lemma 12.5 existiert ein simplizialer Knoten  $x_1$  (wenn  $G$  vollständig ist, wählen wir  $x_1 \in V$  beliebig). Da  $N(x_1)$  eine Clique ist, ist jeder Separator von  $G - x_1$  auch ein Separator von  $G$ . Insbesondere ist jeder minimale Separator von  $G - x_1$  eine Clique. Mit Induktion besitzt  $G - x_1$  eine perfekte Ordnung  $(x_2, \dots, x_n)$ . Daraus ergibt sich eine perfekte Ordnung  $(x_1, \dots, x_n)$  von  $G$ .  $\square$



**Satz 12.7 (Berge 1961, Hajmal, Surányi 1958)** *Chordale Graphen sind perfekt.*

*Beweis:* Induzierte Untergraphen von chordalen Graphen sind chordal. Es genügt deshalb  $\chi(G) \leq \omega(G)$  zu zeigen. Sei  $(x_1, \dots, x_n)$  eine perfekte Ordnung auf  $G$ .  $G' := G[x_2, \dots, x_n]$ ,  $\omega' := \omega(G')$ ,  $\chi' := \chi(G')$ . Mit Induktion ist  $\chi' \leq \omega'$ . 1.Fall: Ist  $|N(x_1)| < \omega'$ , so können wir  $x_1$  mit einer in  $N(x_1)$  nicht verwendeten Farbe färben. Damit ist  $\chi(G) = \chi' \leq \omega' = \omega(G)$ . 2.Fall: Ist  $|N(x_1)| = \omega'$ , so gilt  $\omega(G) = \omega' + 1$  und  $\chi(G) \leq \chi' + 1$ . Daraus folgt  $\chi(G) = \chi' + 1 \leq \omega' + 1 = \omega(G)$   $\square$

## 12.1 Erkennen von chordalen Graphen

**Lemma 12.8** *Die Folge  $(x_1, \dots, x_n)$  ist genau dann eine perfekte Ordnung auf  $G$ , wenn für alle  $j < k$  die folgende Bedingung gilt:*

*Wenn in  $G$  ein Pfad  $P = x_j y_1 \dots y_m x_k$  mit  $y_i \in \{x_1, \dots, x_{j-1}\}$  für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  existiert, dann ist  $x_j x_k \in E$ .*

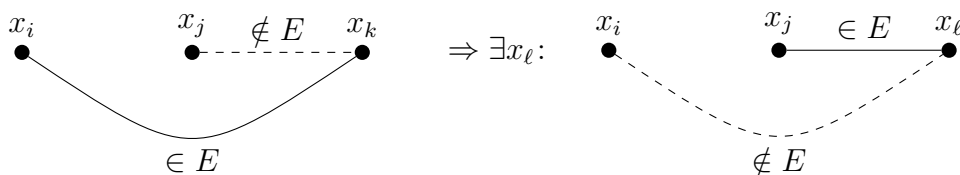
*Beweis:* “ $\Leftarrow$ ”: Seien  $x_j, x_k$  zwei Nachbarn von  $x_i$  mit  $k, j > i$ . Es ist  $x_j x_i x_k$  ein Pfad. Daraus folgt, dass  $x_j x_k \in E$  und  $N(x_i)$  in  $G[x_i, \dots, x_n]$  ist eine Clique. “ $\Rightarrow$ ”: Sei  $m > 0$  minimal, und sei  $y_s = x_t$  mit  $t$  minimal, d.h.  $y_s$  ist der Knoten von  $P$  mit dem kleinsten Index in  $(x_1, \dots, x_n)$ . Da  $N(x_t)$  in  $G[x_t, \dots, x_n]$  eine Clique ist, sind die Nachbarn von  $x_t$  auf  $P$  durch eine Kante verbunden. Wir können  $x_t$  aus  $P$  entfernen. Es folgt  $m = 1$  und  $x_j x_k \in E$ .  $\square$

Die *Maximum-Adjazenz-Suche* berechnet eine Reihenfolge  $(x_n, \dots, x_1)$  der Knoten  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$  wie folgt:

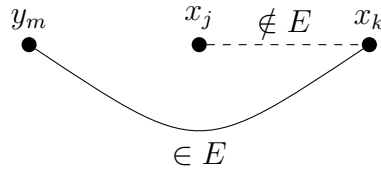
- $x_n \in V$  beliebig
- $x_i \in V \setminus \{x_{i+1}, \dots, x_n\}$  mit  $x_i$  ist zu maximal vielen Knoten aus  $\{x_{i+1}, \dots, x_n\}$  benachbart.

**Satz 12.9** *Sei  $(x_n, \dots, x_1)$  die Reihenfolge der Knoten aus der Maximum-Adjazenz-Suche.  $G$  ist genau dann chordal, wenn  $(x_1, \dots, x_n)$  eine perfekte Ordnung ist.*

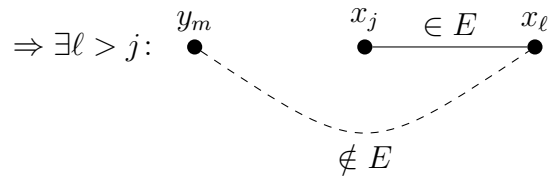
*Beweis:* “ $\Leftarrow$ ” gilt nach Satz 12.6. “ $\Rightarrow$ ”: Sei  $x_i, x_j, x_k \in V$  mit  $i < j < k$ ,  $x_i x_k \in E$ ,  $x_j x_k \notin E$ . Behauptung: Dann existiert  $x_\ell \in V$  mit  $j < \ell$ ,  $x_i x_\ell \notin E$ ,  $x_j x_\ell \in E$



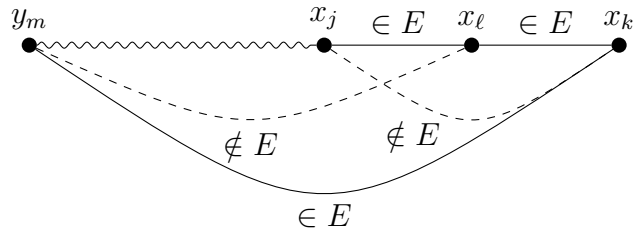
Beweis der Behauptung:  $x_j$  wurde bei der Maximum-Adjazenz-Suche vor  $x_i$  aufgenommen, d. h.  $x_j$  hat mindestens so viele Nachbarn in  $\{x_n, \dots, x_{j+1}\}$  wie  $x_i$ .  $x_k \in \{x_n, \dots, x_{j+1}\}$  ist Nachbar von  $x_i$  aber nicht  $x_j$ . Also muss  $x_\ell$  existieren, ansonsten hätte  $x_i$  echt mehr Nachbarn. Dies zeigt die Behauptung. Angenommen  $(x_1, \dots, x_n)$  ist keine perfekte Ordnung. Nach Lemma 12.8 existiert  $x_j x_k \notin E$ ,  $j < k$ ,  $P = x_j y_1 \dots y_m x_k$  Pfad mit  $y_i \in \{x_1, \dots, x_{j-1}\}$  für alle  $1 \leq i \leq m$ .  $\exists k$  maximal und dann bei festem  $k$  wähle  $j$  maximal. Weiter sei  $m > 0$  minimal.



Nach der vorigen Behauptung



Maximalität von  $k, j$  liefert  $x_\ell x_k \in E$  (betrachte die Fälle  $k < \ell$  und  $j < \ell < k$ )



$\Rightarrow$  Einfacher Kreis  $x_j y_1 \dots y_m x_k x_\ell x_j$  der Länge  $\geq 4$ .  $\nexists$  keine Sehne  $x_\ell y_i$  mit  $i \neq m$ , sonst betrachte kürzeren Kreis  $x_k y_m \dots y_i x_\ell x_k$  der immer noch Länge  $\geq 4$  hat. Kreis hat keine Sehne  $\Rightarrow G$  nicht chordal im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

Der Satz 12.9 liefert folgenden Polynomialzeitalgorithmus (tatsächlich Linearzeit  $\mathcal{O}(n+e)$ ) zur Erkennung chordaler Graphen bei Eingabe der Adjazenzliste:

- (a) Erzeuge  $(x_n, \dots, x_1)$  durch Maximum-Adjazenz-Suche.
- (b) Teste, ob  $(x_1, \dots, x_n)$  perfekte Ordnung ist.

Jeder Schritt lässt sich in  $\mathcal{O}(n+e)$  umsetzen.

# 13 Transitiv orientierbare Graphen (TROs)

Auch: Vergleichbarkeitsgraphen. Ein gerichteter Graph  $(V, F)$ ,  $F \subseteq V \times V$  (nicht  $F \subseteq \binom{V}{2}$ ) heißt *transitiv orientiert*, falls

$$F \cap F^{-1} = \emptyset \quad (\text{Antisymmetrie})$$

$$F^2 \subseteq F \quad (\text{Transitivitat})$$

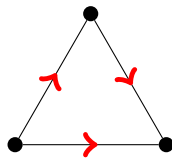
Hierbei ist

$$F^{-1} = \{(y, x) \in V \times V \mid (x, y) \in F\}$$

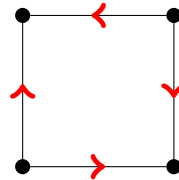
$$F^2 = \{(x, y) \in V \times V \mid \exists z : (x, z) \in F \text{ und } (z, y) \in F\}$$

Ein Graph  $G = (V, E)$  ist genau dann ein TRO, wenn ein transitiv orientierter Graph  $(V, F)$  mit  $E = F \cup F^{-1}$  existiert.

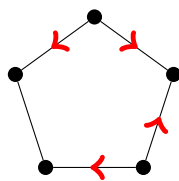
## Beispiele 13.1



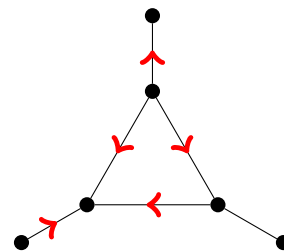
chordal und TRO



nicht chordal aber TRO



nicht chordal, nicht TRO



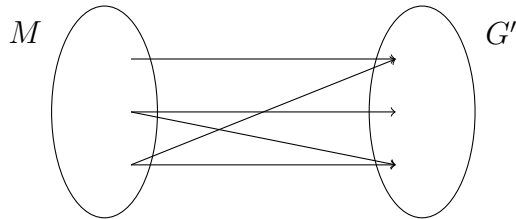
chordal, nicht TRO

◇

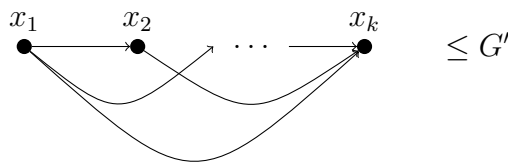
Sei  $G$  TRO und  $H \leq G$  induziert, dann ist  $H$  TRO.

**Satz 13.2** *TROs sind perfekt.*

*Beweis:* Sei  $(V, E)$  TRO und  $G = (V, F)$  eine transitive Orientierung mit  $E = F \cup F^{-1}$ . Es genügt  $\chi(G) \leq \omega(G)$  zu zeigen. Betrachte  $M \subseteq V$  bestehend aus den minimalen Knoten, d.h.  $M = \{x \in V \mid \nexists (y, x) \in F\} \neq \emptyset$ . Es sei  $G' = G - M$ .



$M$  ist unabhängig. Mit Induktion gilt  $\chi(G') \leq \omega(G')$ . Sei  $(x_1, \dots, x_k)$  maximale Clique in  $G'$ .

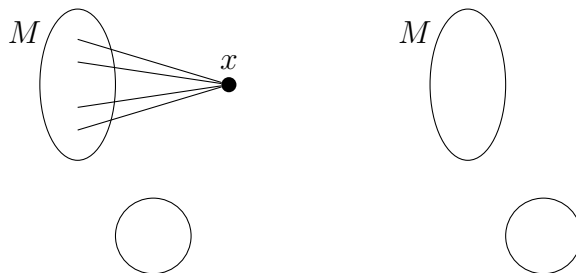


Insbesondere  $x_1 \notin M$ . Also existiert  $x_0 \in V$  mit  $(x_0, x_1) \in F \Rightarrow \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  ist Clique in  $G$ . Damit gilt

$$\chi(G) \leq \chi(G') + 1 \leq \omega(G') + 1 \leq \omega(G)$$

□

**Definition 13.3** Eine Teilmenge von Knoten  $M \subseteq V$  heißt Modul von  $G = (V, E)$ , falls für alle  $x \in V \setminus M$  gilt  $\{x\} \times M \subseteq E$  oder  $(\{x\} \times M) \cap E = \emptyset$ .

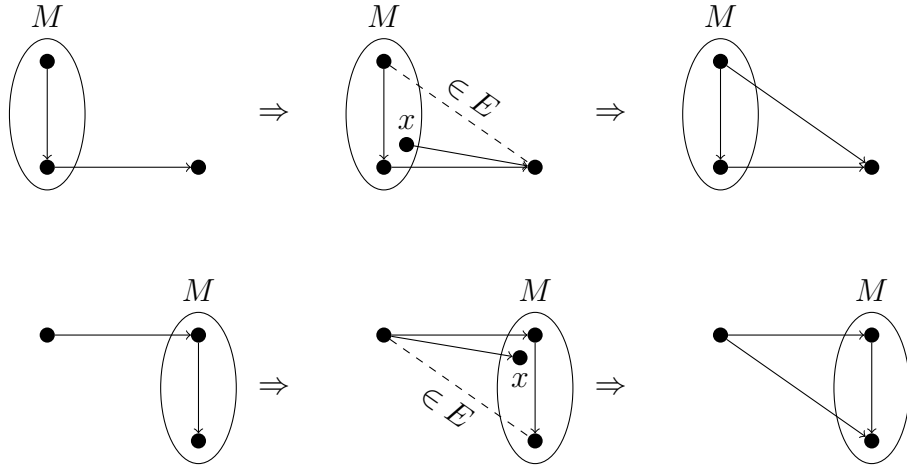


**Lemma 13.4** Sei  $\emptyset \neq M \subseteq V$  ein Modul. Sei  $x \in M$  und seien  $G[M]$  und  $\underbrace{G - (M \setminus \{x\})}_{G/M :=}$  TROs. Dann ist  $G$  TRO.

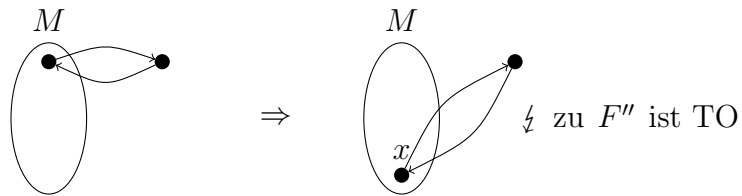
*Beweis:* Seien  $F'$  und  $F''$  TOs von  $G[M]$  und  $G/M$ . Setze

$$\begin{aligned}
 F &:= F' \cup F'' \\
 &\cup \{(x', y) \in M \times (V \setminus M) \mid (x, y) \in F''\} \\
 &\cup \{(y, x') \in (V \setminus M) \times M \mid (y, x) \in F''\}
 \end{aligned}$$

Damit ist  $(V, F)$  TO:  $F^2 \subseteq F$ : (Skizze)



$F \cap F^{-1} = \emptyset$ :

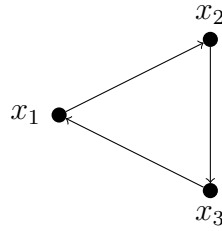


□

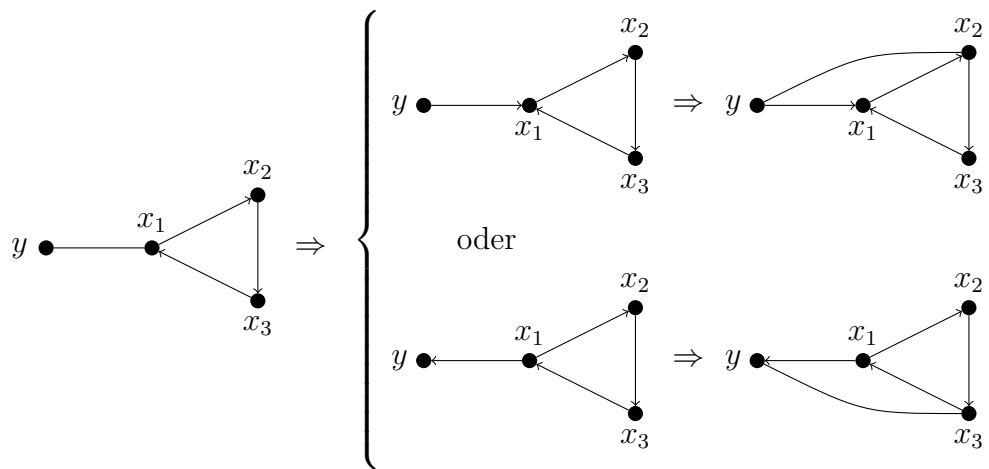
**Definition 13.5** Ein gerichteter Graph  $(V, Q)$  heißt pseudo transitive Orientierung von  $G = (V, E)$ , falls  $Q^2 \subseteq E$  und  $E = Q \cup Q^{-1}$ .

**Satz 13.6**  $G$  ist TRO  $\Leftrightarrow G$  besitzt eine pseudo transitive Orientierung.

*Beweis:* " $\Rightarrow$ " ist trivial, da eine transitive Orientierung eine pseudo transitive Orientierung ist. " $\Leftarrow$ ": Sei  $(V, Q)$  eine pseudo transitive Orientierung und ohne Einschränkung keine transitive Orientierung, d. h. es existieren Knoten  $x_1, x_2, x_3 \in V$ :



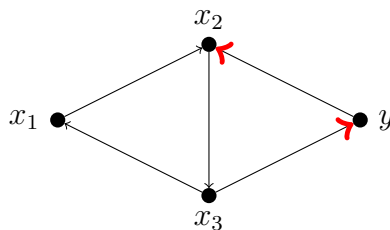
Setze  $X := \{x_1, x_2, x_3\}$ . Behauptung: Jeder Knoten  $y \in V$  hat keinen oder mindestens zwei Nachbarn in  $X$ . Beweis der Behauptung:



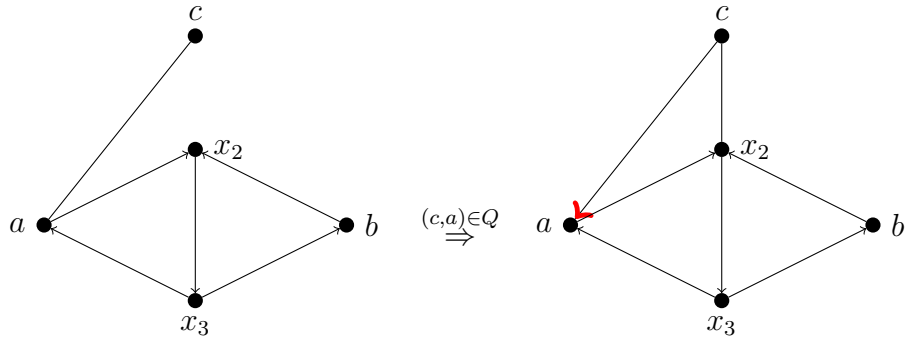
Damit ist die Behauptung bewiesen.

**1. Fall:**  $X$  ist Modul. Dann ist mit Induktion  $G/X$  TRO,  $X$  ist ebenfalls TRO. Nach Lemma 13.4 ist  $G$  TRO.

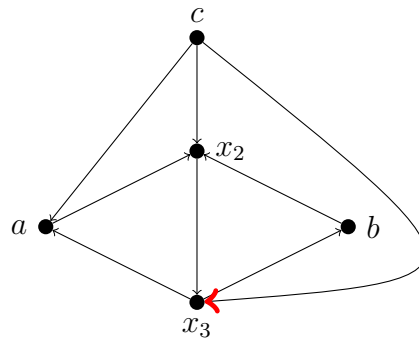
**2. Fall:**  $X$  ist kein Modul. Dann existiert ein  $y \in V \setminus X$  mit  $|N(y) \cap X| = 2$ , d. h.  $\mathfrak{E}$



Die Orientierung ergibt sich aus  $x_1y \notin E$ . Wir setzen  $Y := \{z \in V \mid (z, x_2), (x_3, z) \in Q\}$ . Es ist  $x_1, y \in Y$  und  $x_2, x_3 \notin Y$ . Es genügt zu zeigen, dass  $Y$  Modul ist. Mit Induktion folgt dann  $G/Y$  TRO und  $G[Y]$  TRO, also ist nach Lemma 13.4  $G$  TRO. Seien  $a, b \in Y$  und  $c \in V \setminus Y$  mit  $ac \in E$ . Es ist zu zeigen, dass gilt  $bc \in E$ . Sei zunächst  $(c, a) \in Q$ .



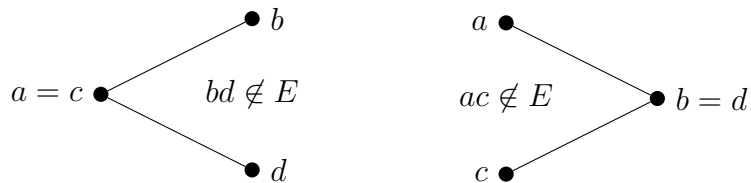
Aus  $(x_2, c) \in Q$  folgt direkt  $bc \in E$ . Sei also  $(c, x_2) \in Q$ . Dann ist  $cx_3 \in E$ . Da  $c \in V \setminus Y$  ist, gilt  $(c, x_3) \in Q$ .



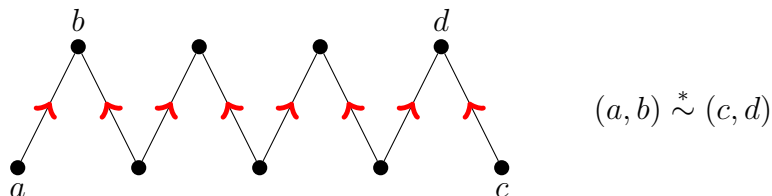
Aus  $(c, x_3), (x_3, b) \in Q$  folgt  $bc \in E$ . Der Fall  $(a, c) \in Q$  ist analog. □

**Definition 13.7**  $(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow ab, cd \in E$  und

- $a = c$  &  $bd \notin E$  oder
- $b = d$  &  $ac \notin E$ .



$\sim^*$  ist die von  $\sim$  erzeugte Äquivalenzrelation, d.h.  $E \subseteq V \times V$  zerfällt in Klassen. Jede solche Klasse heißt *Implikationsklasse*.



**Lemma 13.8** Sei  $(V, F)$  eine transitive Orientierung von  $(V, E)$  und  $A$  eine Implikationsklasse. Dann gilt  $A \subseteq F$  oder  $A \cap F = \emptyset$ .

*Beweis:* Sei  $(a, b) \in F$  und  $(a, b) \sim (c, d)$ . Dann  $(c, d) \in F$ . Der transitive Abschluss folgt mittels Induktion.  $\square$

Folgerung:  $(a, b) \not\sim^* (b, a)$  für einen TRO.

**Satz 13.9**  $G$  ist TRO  $\Leftrightarrow$  für jede Implikationsklasse  $A$  gilt  $A \cap A^{-1} = \emptyset$ .

*Beweis:* " $\Rightarrow$ " gilt nach obiger Folgerung. " $\Leftarrow$ ": Wenn  $A$  Implikationsklasse ist folgt, dass auch  $A^{-1}$  eine Implikationsklasse ist. Sei  $E = A_1 \cup \dots \cup A_k \cup A_1^{-1} \cup \dots \cup A_k^{-1}$  disjunkte Vereinigung von Implikationsklassen. Setze  $Q := A_1 \cup \dots \cup A_k$ . Dann ist  $E = Q \cup Q^{-1}$ ,  $Q \cap Q^{-1} = \emptyset$ . Wir zeigen  $Q^2 \subseteq E$ , die Behauptung folgt dann mit

**Satz 13.6:** Angenommen  $\overset{a}{\bullet} \rightarrow \overset{b}{\bullet} \rightarrow \overset{c}{\bullet}$  in  $Q$  mit  $ac \notin E$ . Dann  $(a, b) \sim (c, b)$ , d. h.  $(a, b) \in Q \Rightarrow (b, c) \notin Q$ .  $\square$

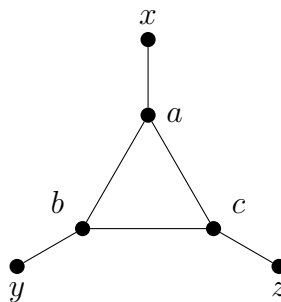
Dies liefert folgenden Algorithmus zur Erkennung von TROs:

```

 $E' := E;$ 
while  $E' \neq \emptyset$  do
   $e := (x, y)$  mit  $xy \in E'$ ;
   $A :=$  Implikationsklasse von  $e$  in  $(V, E)$ ;
  if  $A \cap A^{-1} = \emptyset$  then
     $E' := E' \setminus (A \cup A^{-1})$ ;
  else
    stop; //  $G$  ist kein TRO
  end if
end while
//  $G$  ist TRO

```

**Beispiel 13.10** Betrachten wir nochmals den folgenden Graphen aus Beispiel 13.1:



Es gilt  $(a, x) \sim (a, b) \sim (y, b) \sim (c, b) \sim (c, z) \sim (c, a) \sim (x, a)$  und damit  $(a, x) \sim^* (x, a)$ . Nach Satz 13.9 ist der Graph also kein TRO.  $\diamond$

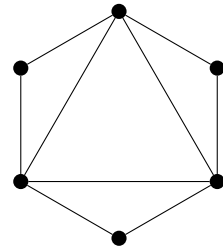
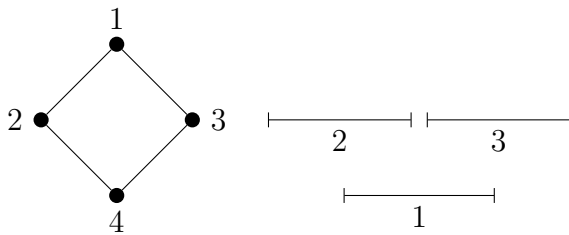
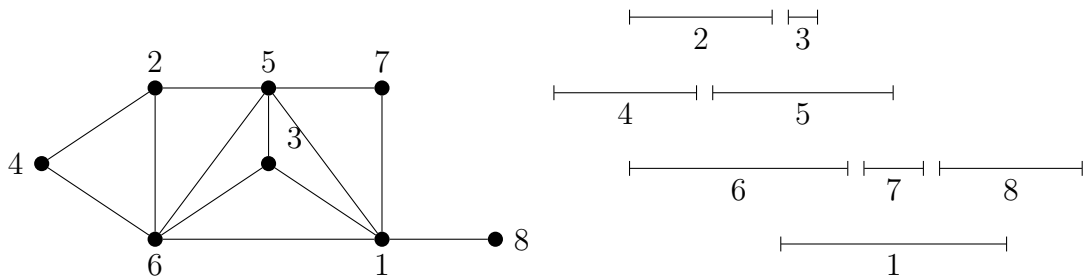


# 14 Intervallgraphen

**Definition 14.1**  $G = (V, E)$  heißt Intervallgraph, falls eine Menge von Intervallen  $I = \{[a_x, b_x] \subseteq \mathbb{R} \mid a_x < b_x, x \in V\}$  existiert mit

$$[a_x, b_x] \cap [a_y, b_y] \neq \emptyset \Leftrightarrow xy \in E$$

**Beispiele 14.2**



ist kein Intervallgraph (und nicht chordal)

kein Intervallgraph aber chordal

◇

**Bemerkung 14.3** Induzierte Untergraphen von Intervallgraphen sind Intervallgraphen.

**Satz 14.4** Intervallgraphen sind chordal.

*Beweis:* Es ist zu zeigen, dass ein simplicialer Knoten existiert. Wähle  $x \in V$  so, dass  $b_x = \min \{b_y \mid y \in V\}$ . Damit ist  $x$  simplicial: Seien  $xy, xz \in E$ , d. h.  $\underbrace{[a_x, b_x] \cap [a_y, b_y]}_{I_x} \neq \emptyset$  und  $\underbrace{[a_x, b_x] \cap [a_z, b_z]}_{I_z} \neq \emptyset$ . Dann ist  $b_x \in I_x \cap I_y$  und  $b_x \in I_x \cap I_z$ . Es folgt  $b_x \in I_y \cap I_z$ ,

also ist  $I_y \cap I_z \neq \emptyset$  und  $yz \in E$ . □

**Satz 14.5** *Es sei  $G$  ein Intervallgraph. Dann ist  $\overline{G}$  TRO.*

*Beweis:* Sei  $I_x = [a_x, b_x]$  das Intervall zu  $x$ . Setze  $x < y$  falls  $b_x < a_y$ :  $\overbrace{\quad\quad}^{I_x} \quad \overbrace{\quad\quad}^{I_y}$   
 $\quad\quad\quad\quad\quad b_x \quad a_y$

Trivialerweise ist  $(V, <)$  eine transitive Orientierung von  $\overline{G}$ . □

**Satz 14.6**  *$G$  ist genau dann ein Intervallgraph, wenn  $G$  chordal ist und  $\overline{G}$  ist TRO.*

*Beweis:* " $\Rightarrow$ " gilt nach Satz 14.4 und 14.5. " $\Leftarrow$ ": Mit Induktion nach  $|V|$  zeigen wir:  $(V, <)$  transitive Orientierung von  $\overline{G}$ ,  $G$  chordal  $\Rightarrow$  Es existieren Intervalle  $I_x = [a_x, b_x]$  so, dass  $x < y \Leftrightarrow b_x < a_y$ . Sei  $v \in V$  simplizial in  $G$ . Induktiv sei auf  $V \setminus \{v\}$  eine entsprechende Menge von Intervallen  $\{I_y \mid y \in V \setminus \{v\}\}$  bereits definiert.  $V \setminus \{v\}$  zerlegt sich in drei Mengen:

$$\begin{aligned} X &:= \{x \in V \mid x < v\} \\ Y &:= \{y \in V \mid y > v\} \\ Z &:= \{z \in V \mid vz \in E\} \end{aligned}$$

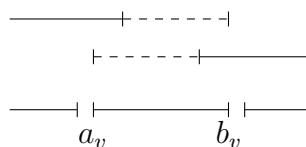
Für alle  $x \in X$  und alle  $y \in Y$  gilt  $x < y$ , da  $(V, <)$  transitiv ist. Es folgt  $b_x < a_y$  für alle  $x \in X, y \in Y$ . Setze

$$\begin{aligned} a_v &= \max \{b_x \mid x \in X\} + \varepsilon \\ b_v &= \min \{a_y \mid y \in Y\} - \varepsilon \end{aligned}$$

für  $\varepsilon > 0$  so, dass  $a_v < b_v$ :  $\overbrace{\quad\quad}^{a_v} \quad \overbrace{\quad\quad}^{b_v}$   
 $\quad\quad\quad\quad\quad b_x \quad a_y$  Für  $z \in Z$  definieren wir neue

Intervalle  $I'_z$ :

$$I'_z := [\min \{a_v, a_z\}, \max \{b_v, b_z\}]$$



Es gilt  $I_z \subseteq I'_z$ , es wurden keine Überschneidungen entfernt. Die einzigen Überschneidungen, die hinzugefügt wurden, sind solche zwischen  $I'_z, z \in Z$ . Da  $v$  simplizial war, waren alle möglichen Überschneidungen bereits vorher schon vorhanden (evtl. aber kürzer). □

# 15 Permutationsgraphen

**Definition 15.1** Ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $E \subseteq \binom{V}{2}$  heißt Permutationsgraph, wenn es eine Bijektion  $\pi$  von  $V$  gibt und  $V$  durch eine (irreflexive, antisymmetrische und transitive) Relation  $<$  linear geordnet ist so, dass für alle  $i, j \in V$  gilt:

$$ij \in E \text{ genau dann, wenn } i < j \iff \pi(i) > \pi(j).$$

Ein Paar  $(i, j) \in V \times V$  mit  $ij \in E$  heißt Fehlstellung von  $\pi$ .

**Satz 15.2** Die Klasse der Permutationsgraphen ist unter induzierten Untergraphen abgeschlossen.

*Beweis:* Sei  $U \subseteq V$ , dann sind  $\pi(U)$  und  $U$  gleichmächtige linear geordnete Mengen. Also gibt es eine Bijektion  $\sigma : \pi(U) \rightarrow U$  so, dass für alle  $p, q \in \pi(U)$  gilt:

$$p < q \iff \sigma(p) < \sigma(q).$$

Damit ist  $\tau : U \xrightarrow{\pi} \pi(U) \xrightarrow{\sigma} U$  eine Bijektion so, dass für alle  $i, j \in U$  gilt:

$$ij \in E \text{ genau dann, wenn } i < j \iff \pi(i) > \pi(j) \iff \tau(i) > \tau(j).$$

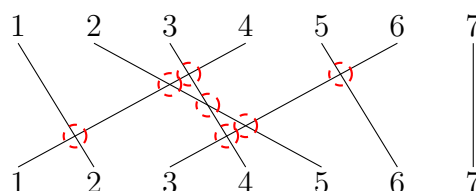
□

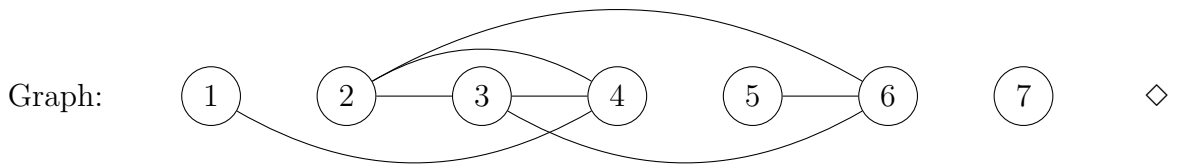
Ein Permutationsgraph kann konkret durch  $V = N = \{1, \dots, n\}$  mit der üblichen Ordnung  $<$  auf den natürlichen Zahlen realisiert werden. Wir schreiben dann  $G[\pi]$  und dieser konkrete Graph wird *Inversionsgraph* der Permutation  $\pi$  von  $\{1, \dots, n\}$  genannt.

Jeder Permutationsgraph  $G$  ist isomorph zu einem  $G[\pi]$ . Als abstrakte Graphen sind  $G$  und  $G[\pi]$  die gleichen Graphen. Die Fehlstellungen einer Permutation  $\pi$  lassen sich graphisch veranschaulichen. Dazu trägt man zwei mal die Zahlen 1 bis  $n$  in Reihen übereinander auf. Anschließend verbindet man jedes  $i$  in der oberen Reihe mit  $\pi(i)$  in der unteren Reihe. Eine Fehlstellung  $(i, j)$  entspricht nun genau dem Schnitt der Verbindung, die in der oberen Reihe bei  $i$  beginnt, mit der, die in der oberen Reihe bei  $j$  beginnt.

**Beispiel 15.3**  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

Zeichnung:





**Bemerkung 15.4** In der Literatur wird der Inversionsgraph auch über die Fehlstellungen von  $\pi^{-1}$  definiert. Dort gilt also  $G[\pi] = (V, E') = G[\pi^{-1}]$  beziehungsweise

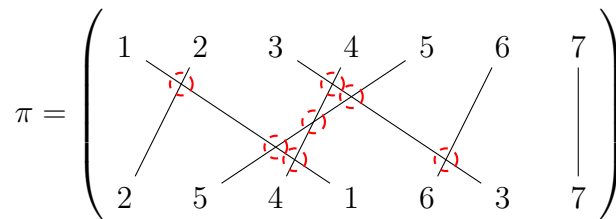
$$ij \in E' \Leftrightarrow (i - j)(\pi^{-1}(i) - \pi^{-1}(j)) < 0.$$

Graphentheoretisch sind die beiden Definitionen äquivalent, da  $\pi$  einen Graphisomorphismus von  $G[\pi] = (V, E)$  nach  $G[\pi^{-1}] = (V, E')$  vermittelt:

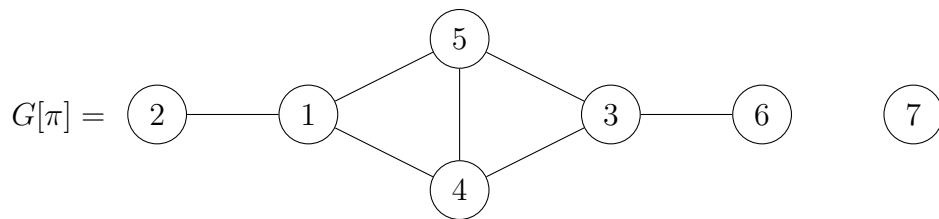
$$\begin{aligned} ij \in E &\Leftrightarrow (i - j)(\pi(i) - \pi(j)) < 0 \\ &\Leftrightarrow (\pi(i) - \pi(j))(i - j) = (\pi(i) - \pi(j))(\pi^{-1}(\pi(i)) - \pi^{-1}(\pi(j))) < 0 \\ &\Leftrightarrow \pi(i)\pi(j) \in E' \end{aligned}$$

Auch diese Definition besitzt eine graphische Veranschaulichung: Hier werden in der oberen Zeile die Zahlen von 1 bis  $n$  aufgetragen und in der unteren Zeile die Zahlen  $\pi(1)$  bis  $\pi(n)$ . Nun wird jedes  $i$  in der oberen Zeile mit dem  $i$  in der unteren Zeile verbunden. Die Schnitte liefern wieder die Fehlstellungen (diesmal von  $\pi^{-1}$ ) beziehungsweise die Kanten (in  $E'$ ).

**Beispiele 15.5**



Die untere Zahl  $i$  steht an Position  $\pi^{-1}(i)$ . Eine Kante  $ij$  existiert, falls sich die Verbindungen von  $i$  nach  $\pi^{-1}(i)$  und von  $j$  nach  $\pi^{-1}(j)$  kreuzen.



**Definition 15.6** Für eine Permutation  $\pi : N \rightarrow N$  sei  $\bar{\pi} : N \rightarrow N$  die Permutation mit  $\bar{\pi}(i) = n + 1 - \pi(i)$ .

**Lemma 15.7** Die Klasse der Permutationsgraphen ist abgeschlossen unter Komplement. Genauer gilt  $\overline{G[\pi]} = G[\bar{\pi}]$ .

*Beweis:* Sei  $G[\pi] = (N, E)$  und  $G[\bar{\pi}] = (N, \bar{E})$  und  $i, j \in N$  mit  $i \neq j$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} ij \in \bar{E} &\Leftrightarrow 0 > (i - j)(\bar{\pi}(i) - \bar{\pi}(j)) = (i - j)(n + 1 - \pi(i) - n - 1 + \pi(j)) \\ &= (i - j)(\pi(j) - \pi(i)) \\ &= -(i - j)(\pi(i) - \pi(j)) \\ &\Leftrightarrow 0 < (i - j)(\pi(i) - \pi(j)) \Leftrightarrow ij \notin E \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 15.8** Die Abgeschlossenheit unter Komplement lässt sich auch mithilfe der Definition über die Fehlstellungen der inversen Permutation zeigen. Hierbei wird die gespiegelte (engl. reverse) Permutation  $\pi_\rho$  von  $\pi$  verwendet. Sie ist definiert durch:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \pi(1) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix} \Rightarrow \pi_\rho = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \pi(n) & \cdots & \pi(1) \end{pmatrix}$$

Es gilt dann  $\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j) \Leftrightarrow \pi_\rho^{-1}(i) > \pi_\rho^{-1}(j)$  und damit  $\overline{G'[\pi]} = G'[\pi_\rho]$ .

**Lemma 15.9** Ist  $G$  ein Permutationsgraph, dann ist  $G$  TRO.

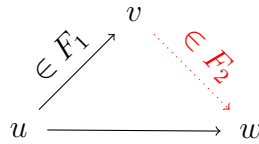
*Beweis:* Setze  $F = \{(i, j) \mid ij \in E \text{ und } i < j\}$ . Zu zeigen ist nur die Transitivität von  $F$ . Seien  $(i, j), (j, k) \in F$ . Dann gilt  $\pi(i) > \pi(j) > \pi(k)$  aber  $i < j < k$  und damit  $ik \in E$  und  $(i, k) \in F$ . □

**Satz 15.10**  $G$  ist genau dann Permutationsgraph, wenn  $G$  TRO und  $\bar{G}$  TRO.

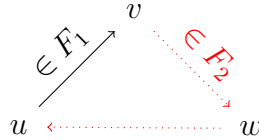
*Beweis:* “ $\Rightarrow$ ” gilt nach Lemma 15.7 und 15.9.

“ $\Leftarrow$ ”: Sei  $F_1$  eine transitive Orientierung von  $G = (V, E)$  und  $F_2$  eine von  $\bar{G}$ . Wir zeigen zunächst, dass  $F_1 \cup F_2$  eine lineare Ordnung auf  $V$  ist. Es gilt:

- (a) (Vollständigkeit)  $u, v \in V \implies uv \in E$  oder  $uv \notin E$ . Also ist entweder  $(u, v)$  oder  $(v, u)$  in  $F_1 \cup F_2$ .
- (b) (Antisymmetrie)  $(u, v) \in F_1 \cup F_2 \implies$  entweder  $(u, v) \in F_1$  oder  $(u, v) \in F_2$ , aber nicht beides (da dann sowohl  $uv \in E$  als auch  $uv \notin E$  gelten müsste). Aufgrund der Antisymmetrie von  $F_1$  und  $F_2$  ergibt sich  $(v, u) \notin F_1, F_2$ .
- (c) (Transitivität) Seien  $(u, v), (v, w) \in F_1 \cup F_2$ . Gilt  $(u, v), (v, w) \in F_i$  für  $i \in \{1, 2\}$ , so ist auch  $(u, w) \in F_i \subseteq F_1 \cup F_2$ . Der interessante Fall ist also  $\emptyset$  (aufgrund von Symmetrie)  $(u, v) \in F_1$  (also  $uv \in E$ ) und  $(v, w) \in F_2$  (also  $vw \notin E$ ). Es sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden. Ist  $uw \in E$ , dann muss entweder  $(u, w) \in F_1$  oder  $(w, u) \in F_1$  sein. Ist ersteres der Fall, sind wir fertig; letzteres kann jedoch nicht der Fall sein, weil die Transitivität von  $F_1$  dann  $(w, v) \in F_1$  und damit  $vw \in E$  erzwingen würde:



Ist hingegen  $uw \notin E$ , dann muss entweder  $(u, w) \in F_2$  oder  $(w, u) \in F_2$  sein. Im ersten Fall sind wir wieder fertig und im zweiten Fall müsste auch  $(v, u) \in F_2$  und damit  $uv \notin E$  sein:



Weil  $F_1 \cup F_2$  also eine lineare Ordnung auf  $V$  ist, können wir die Knoten so mit den natürlichen Zahlen  $\{1, \dots, n\}$  mit  $n = |V|$  identifizieren, dass gilt:

$$i < j \Leftrightarrow (i, j) \in F_1 \cup F_2$$

Da  $F_1^{-1} = \{(v, u) \mid (u, v) \in F_1\}$  ebenfalls eine transitive Orientierung von  $G$  ist, ist auch  $F_1^{-1} \cup F_2$  eine lineare Ordnung auf  $V = \{1, \dots, n\}$ . Daher gibt es (genau) eine Permutation  $\pi$  mit:

$$i < j \Leftrightarrow (\pi(i), \pi(j)) \in F_1^{-1} \cup F_2 \text{ für alle } i, j \in V.$$

Wir behaupten

$$ij \in E \Leftrightarrow (i - j)(\pi^{-1}(i) - \pi^{-1}(j)) < 0. \quad (15.1)$$

Damit ist dann  $G$  also der konkrete Permutationsgraph  $G(\pi^{-1}) = (V, E(\pi^{-1}))$ . Wir wissen schon

$$i < j \iff (i, j) \in F_1 \cup F_2 \iff (\pi(i), \pi(j)) \in F_1^{-1} \cup F_2. \quad (15.2)$$

(a)  $ij \in E$ :  $\mathbb{E} i < j$  (sonst vertausche  $i$  und  $j$ ). Nach (15.2) erhalten wir die folgenden Implikationen:

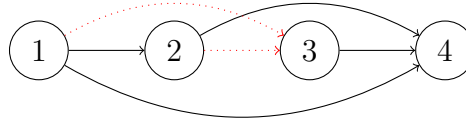
$$\begin{aligned} i < j &\implies (i, j) \in F_1 \implies (j, i) \in F_1^{-1} \\ &\implies (\pi\pi^{-1}(j), \pi\pi^{-1}(i)) \in F_1^{-1} \implies \pi^{-1}(j) < \pi^{-1}(i) \implies ij \in E(\pi^{-1}). \end{aligned}$$

(b)  $ij \notin E$ :  $\mathbb{E} i < j$ . Nach (15.2) erhalten wir die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} i < j &\implies (i, j) \in F_2 \implies (\pi\pi^{-1}(i), \pi\pi^{-1}(j)) \in F_2 \\ &\implies \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j) \implies ij \notin E(\pi^{-1}). \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung (15.1) und damit die Aussage des Satzes. □

**Beispiel 15.11** Sei  $G$  folgender Graph,  $F_1$  die angegebene transitive Orientierung seiner Kanten und  $F_2$  die angegebene transitive Orientierung seiner **Nicht-Kanten**:



Die Knoten sind bereits entsprechend  $F_1 \cup F_2$  geordnet. Die Anordnung gemäß  $F_1^{-1} \cup F_2$  ist  $(4, 2, 1, 3) = (\pi(1), \dots, \pi(4))$ . Die Fehlstellungen von  $\pi^{-1}$  sind:

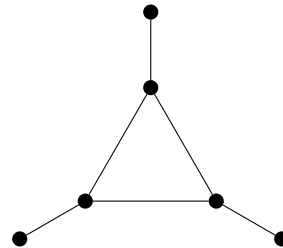
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

◇

# 16 Splitgraphen

Ein Graph  $G = (V, E)$  ist ein *Splitgraph*, falls eine Zerlegung  $V = K \cup U$  existiert, so dass  $K$  eine Clique und  $U$  eine unabhängige Menge bildet. Wir können dabei stets annehmen, dass  $K$  und  $U$  disjunkt sind. Zwischen  $K$  und  $U$  können weitere Kanten existieren.

Beispiel 16.1



◇

Mit  $2K_2$  bezeichnen wir den Graphen, der aus zwei disjunkten Kopien von  $K_2$  besteht. Es gilt also  $2K_2 = \overline{C_4}$ .

**Satz 16.2** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

- (a)  $G$  ist ein Splitgraph.
- (b)  $G$  und  $\overline{G}$  sind beide chordal.
- (c)  $G$  enthält keinen induzierten Untergraphen der Form  $2K_2$ ,  $C_4$  oder  $C_5$ .

*Beweis:* “(a)  $\Rightarrow$  (b)”: Wenn  $G$  ein Splitgraph ist, dann ist auch  $\overline{G}$  ein Splitgraph. Es genügt daher zu zeigen, dass  $G$  chordal ist. Sei  $V = K \cup U$  mit  $K$  Clique und  $U$  unabhängig und sei  $C$  ein einfacher Kreis in  $G$  der Länge  $\geq 4$ . Dann existiert ein Knoten  $x \in U \cap V(C)$ . Die beiden Nachbarn  $a, b$  von  $x$  liegen in  $K$ . Da  $K$  ein Clique ist, liefert dies die Sehne  $ab \in E$ .

“(b)  $\Rightarrow$  (c)”: Klar, da  $\overline{2K_2} = C_4$ .

“(c)  $\Rightarrow$  (a)”: Sei  $U$  eine unabhängige Menge maximaler Größe, so dass  $G-U$  möglichst viele Kanten besitzt, und sei  $K = V \setminus U$ . Wir zeigen, dass  $K$  eine Clique ist. Angenommen  $ab \notin E$  für  $a, b \in K$  mit  $a \neq b$ . Wenn  $a$  und  $b$  zwei gemeinsame Nachbarn  $x, y \in U$  haben, dann induzieren  $a, x, b, y$  einen  $C_4$ . Wenn  $a$  und  $b$  keine gemeinsame Nachbarn in  $U$  haben, dann finden wir aufgrund der Maximalität von  $U$  zwei verschiedene Knoten  $a', b' \in U$  mit  $aa', bb' \in E$ . Nun induzieren  $a, a', b, b'$  einen  $2K_2$ . Sei



schließlich  $c \in U$  der einzige gemeinsame Nachbar von  $a$  und  $b$  in  $U$ . Wegen der Maximalität von  $U$  muss  $a$  oder  $b$  einen weiteren Nachbarn in  $U$  haben (andernfalls wäre  $(U \cup \{a, b\}) \setminus \{c\}$  eine größere unabhängige Menge). Ohne Einschränkung sei  $a' \in U$  mit  $a' \neq c$  und  $aa' \in E$ . Wenn  $b$  außerhalb von  $\{c\} \cup N(c)$  keinen weiteren Nachbarn in  $G$  hat, dann ist  $U' = (U \setminus \{c\}) \cup \{b\}$  unabhängig und  $G - U'$  hat mehr Kanten als  $G - U$ . Nach Wahl von  $U$  existiert also  $b' \neq a', c$  mit  $bb' \in E$  und  $cb' \notin E$  ( $b' \in K$  ist möglich). Falls  $ab' \in E$ , dann induziert  $a, c, b, b'$  einen  $K_4$ . Sei also  $ab' \notin E$ . Falls  $a'b' \in E$ , dann induziert  $a, c, b, b', a'$  einen  $K_5$ ; andernfalls induziert  $a, a', b, b'$  einen  $2K_2$ .  $\square$

**Definition 16.3** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $E \subseteq \binom{V}{2}$  und  $|V| = n$ . Für  $x \in V$  sei  $d_x$  der Grad von  $x$ . Schreibe  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$  so, dass  $d_{x_i} \geq d_{x_j}$  für alle  $i \leq j$ . Dann heißt die Folge

$$s(G) = (d_{x_1}, \dots, d_{x_n})$$

die Gradsequenz von  $G$ .

**Beispiel 16.4** Sei  $G = (V, E)$  ein Splitgraph und  $V = K \cup U$  eine Partition in eine Clique  $K$  und eine unabhängigen Menge  $U$ . Wir nehmen an, dass  $|U|$  maximal ist. Dann hat jede Ecke  $x \in K$  einen Nachbarn in  $U$ . Gilt dann  $|K| = m$ , so gilt für die Gradsequenz  $s(G) = (d_1, \dots, d_n)$

- (a)  $d_{x_i} \geq m$  für  $1 \leq i \leq m$ .
- (b)  $d_{x_j} \leq m$  für  $m + 1 \leq j \leq n$ .
- (c)  $\sum_{i=1}^m d_i = m(m - 1) + \sum_{j=m+1}^n d_j$ .

$\diamond$

**Satz 16.5 (Erdős, Gallai 1960)** Eine Folge  $s = (d_1, \dots, d_n)$  mit  $d_1 \geq \dots \geq d_n$  ist Gradsequenz genau dann, wenn für alle  $1 \leq k \leq n$  gilt:

- $\sum_{i=1}^n d_i$  ist gerade.
- $\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k - 1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}$  für  $1 \leq k \leq n$ .

**Korollar 16.6** Sei  $G$  ein Graph mit der Gradsequenz  $s(G) = (d_1, \dots, d_n)$ . Dann ist  $G$  genau dann ein Splitgraph, wenn ein  $1 \leq m \leq n$  existiert mit

$$\sum_{i=1}^m d_i = m(m - 1) + \sum_{j=m+1}^n d_j.$$

Wir integrieren den Beweis des Korollars in den Beweis des Satzes.

*Beweis:* “ $\Rightarrow$ ”: Für  $s = s(G)$  ist  $\sum_{i=1}^n d_i$  gerade. Sei jetzt  $1 \leq k \leq n$ . Zu zeigen ist nur:

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n \min\{k, d_j\} \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n d_j.$$

Ist  $K = \{x_1, \dots, x_k\}$  keine Clique, so nehmen wir Kanten hinzu, bis  $K$  eine Clique ist. Ist  $U = \{x_{k+1}, \dots, x_n\}$  nicht unabhängig, so streichen wir Kanten. Es reicht also die Ungleichungen zu zeigen, wenn  $K$  eine Clique und  $U$  unabhängig ist. Unter dieser Annahme gilt für  $k < j$  stets  $d_j = \min\{k, d_j\}$  und damit überall Gleichheit:

$$\sum_{i=1}^k d_i = k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n \min\{k, d_j\} = k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n d_j.$$

“Beweis des Korollars unter der Annahme des Satzes”: Ist der Satz bewiesen, so gilt

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n \min\{k, d_j\} \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n d_j.$$

Wie eben benutzt wurde: Ist  $K = \{x_1, \dots, x_k\}$  keine Clique, so gilt

$$\sum_{i=1}^k d_i < k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n \min\{k, d_j\} \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n d_j.$$

Ist  $U = \{x_{k+1}, \dots, x_n\}$  nicht unabhängig, so gilt

$$\sum_{i=1}^k d_i < k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n d_j.$$

Ist also  $G$  kein Splitgraph, so gilt für alle  $1 \leq k \leq n$  die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^k d_i < k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n d_j.$$

Zusammen mit dem Beispiel folgt das Korollar.

“ $\Leftarrow$ ”: Ein Graph  $G$  mit Knotenmenge  $\{x_1, \dots, x_n\}$  heißt *Teilrealisierung* mit *Index*  $r$  von  $s = (d_1, \dots, d_n)$  mit  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ , falls gilt:

- (a)  $d_{x_i} = d_i$  für alle  $1 \leq i < r$ ,
- (b)  $d_{x_j} \leq d_j$  für alle  $r \leq j \leq n$  und
- (c)  $U = \{x_{r+1}, \dots, x_n\}$  ist unabhängig.

Der Graph  $(V, \emptyset)$  ist stets eine Teilrealisierung vom Index 1. Der Index  $r$  einer Teilrealisierung heißt *kritisch*, falls  $d_{x_r} < d_r$  gilt. Falls kein kritischer Index existiert sind wir fertig.

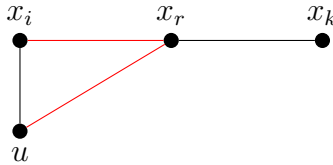
Sei also  $G$  eine Teilrealisierung mit kritischem Index  $r$ . Wir zeigen, dass wir dann auch eine Teilrealisierung finden, bei der  $d_{x_r}$  größer ist. Dies bedeutet, dass wir jede Teilrealisierung zu einem Graphen  $G$  mit  $(d_1, \dots, d_n) = s(G)$  umbauen können.

Schreibweise:  $x_i \leftrightarrow x_j$ , falls  $x_i x_j \in E$  und  $x_i \nleftrightarrow x_j$ , falls  $x_i x_j \notin E$ .

1. Fall:  $x_r \leftrightarrow x_k$  mit  $d_{x_k} < d_k$  für ein  $k \neq r$ : Dann ist  $r < k$  und wir fügen  $x_r x_k$  hinzu.
2. Fall: Es gibt ein  $i < r$  mit  $x_r \leftrightarrow x_i$ . Dann gibt es ein  $u \in N(x_i) \setminus N(x_r)$ , denn  $r$  ist kritisch und daher  $d_{x_i} = d_i \geq d_r > d_{x_r}$ .

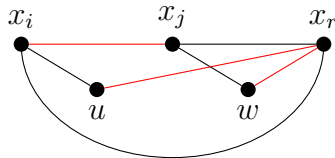
a) Falls  $d_r - d_{x_r} \geq 2$ , entferne  $x_i u$ , füge  $x_i x_r$  und  $x_r u$  hinzu.

b) Falls  $d_r - d_{x_r} = 1$ , existiert  $k > r$  mit  $d_{x_k} < d_k$ , weil  $\sum d_i - \sum d_{x_i}$  gerade ist. Mit Fall 1 folgt  $x_r \leftrightarrow x_k$ . Ersetze  $x_i u, x_r x_k$  durch  $x_i x_r, x_r u$ .

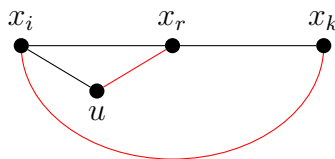


Für die restlichen Fälle gilt also  $x_1, \dots, x_{r-1} \in N(x_r)$  und  $d_{x_k} < d_k$  impliziert  $x_r \leftrightarrow x_k$  für  $r < k$  (nach Fall 1).

3. Fall:  $x_1, \dots, x_{r-1} \in N(x_r)$  und  $x_i \leftrightarrow x_j$  für  $i < j < r$ :  
Es ist  $d_{x_i} \geq d_{x_j} > d_{x_r}$ , also gibt es  $u \in N(x_i) \setminus N(x_r)$  und  $w \in N(x_j) \setminus N(x_r)$ , [ $u = w$  ist möglich]. Ersetze die beiden Kanten  $u x_i, w x_j$  durch  $x_i x_j$  und  $u x_r$ .  
Man beachte, dass  $u, w$  in  $\{x_{r+1}, \dots, x_n\}$  sind, da  $x_1, \dots, x_{r-1} \in N(x_r)$ . Also dürfen wir für  $u \neq w$  den Grad bei  $w$  verringern.



4. Fall:  $\{x_1, \dots, x_r\}$  ist eine Clique und  $d_{x_k} \neq \min\{r, d_k\}$  für ein  $k > r$ :  
Dann ist  $d_{x_k} \leq d_k$  und  $d_{x_k} \leq r$  (da  $\{x_{r+1}, \dots, x_n\}$  unabhängig ist). Also ist  $d_{x_k} < \min\{r, d_k\}$ . Mit Fall 1 folgt  $x_k \leftrightarrow x_r$ . Wegen  $x_k \leftrightarrow x_r$  und  $d_{x_k} < r$  gibt es ein  $i < r$  so, dass  $x_k \leftrightarrow x_i$ . Da  $d_{x_i} > d_{x_r}$  gibt es ein  $u \in N(x_i) \setminus (N(x_r) \cup \{x_r\})$ . Ersetze  $u x_i$  durch  $x_i x_k$  und  $u x_r$ .



Tritt keiner der Fälle 1 - 4 ein, so bildet  $K = \{x_1, \dots, x_r\}$  eine Clique,  $U = \{x_{r+1}, \dots, x_n\}$  unabhängig. Ferner ist  $d_{x_k} = \min\{r, d_k\}$  für alle  $k > r$ . Wir erhalten einen Widerspruch wie folgt.

$$\begin{aligned}
 r(r-1) + \sum_{k=r+1}^n \min\{r, d_k\} &= r(r-1) + \sum_{k=r+1}^n d_{x_k} \\
 &= \sum_{i=1}^r d_{x_i} < \sum_{i=1}^r d_i \\
 &\leq r(r-1) + \sum_{k=r+1}^n \min\{r, d_k\}.
 \end{aligned}$$

□

# 17 Bipartite Graphen

## 17.1 Ein Hauch von Perfektheit

In diesem Abschnitt sei  $G(V, E)$  ein endlicher ungerichteter Graph mit  $E \subseteq \binom{V}{2}$  und  $|V| = n$ . Mit  $H$  bezeichnen wir einen induzierten Untergraphen. Damit gilt  $H = (V', E')$  mit  $V' \subseteq V$  und  $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ . Zu jedem Graphen  $G$  gehören vier wichtige Parameter  $\alpha(G)$ ,  $\kappa(G)$ ,  $\chi(G)$  und  $\omega(G)$ . Sie sind wie folgt definiert.

Es gilt immer  $\alpha(G) \leq \kappa(G)$  und  $\chi(G) \geq \omega(G)$ . Dies ist trivial: Ist  $U \subseteq V$  eine unabhängige Menge, so benötigen wir für jede Ecke  $u \in U$  schon eine Clique; und ist  $C \subseteq V$  eine Clique, so benötigen wir schon  $|C|$  Farben für diese Clique.

Für den komplementären Graphen  $\overline{G}$  gilt offenbar  $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$  und  $\kappa(G) = \chi(\overline{G})$ . Ein Graph heißt  $\alpha$ -perfekt, wenn  $\alpha(H) = \kappa(H)$  für alle induzierten Untergraphen gilt. Analog heißt er  $\chi$ -perfekt, wenn  $\chi(H) = \omega(H)$  für alle induzierten Untergraphen gilt. Offenbar ist  $G$  genau dann  $\alpha$ -perfekt, wenn  $\overline{G}$  ein  $\chi$ -perfekter Graph ist.

Viel erstaunlicher ist, dass  $\alpha$ -Perfektheit äquivalent zu  $\chi$ -Perfektheit ist.

Für bipartite Graphen werden wir die Perfektheit im folgenden Abschnitt über den Heiratssatz nachweisen.

## 17.2 Der Heiratssatz

Es sei jetzt  $G = (V, E)$  mit  $E \subseteq \binom{V}{2}$  und  $|V| = n$  bipartit. Dies bedeutet, dass es eine Partition  $V = A \cup B$  mit  $A \cap B = \emptyset$  gibt und Kanten nur zwischen  $A$  und  $B$  bestehen. Statt  $E \subseteq \binom{V}{2}$  können wir uns dann auch  $E \subseteq A \times B$  vorstellen und benutzen beide Konventionen gleichberechtigt.

Offenbar gilt  $\chi(G) \leq 2$  und  $\chi(G) \leq 1$  gilt genau dann, wenn  $E = \emptyset$  ist. Da jeder induzierte Untergraph  $H$  ebenfalls bipartit ist, ist die  $\chi$ -Perfektheit bipartiter Graphen trivial. Anders sieht es bei der  $\alpha$ -Perfektheit aus. Wir betrachten hierzu Paarungen. Eine *Paarung* (oder ein *Matching*) ist eine Teilmenge  $M \subseteq E$  von Kanten, die sich keine Ecken teilen. Dies bedeutet, sind  $ab, a'b' \in M$  mit  $ab \neq a'b'$ , so gilt  $\{a, b\} \cap \{a', b'\} = \emptyset$ .

Dies führt unmittelbar zum Szenario des Heiratssatzes. Stellen wir uns  $A$  als eine Menge von Damen (Alices) und  $B$  als eine Menge von Herren (Bobs) vor und bezeichne  $E$  die Sich-Gegenseitig-Mögen-Relation. Dann ist  $M$  eine Menge von Paaren, in dem sich die Partner gegenseitig mögen. Heiraten diese Paare, so mögen sich die Ehepartner

und es gibt keine Bigamie. Damit stellt sich das algorithmische Problem, ein möglichst großes Matching zu finden. Insbesondere wollen wir klären, unter welcher Bedingung alle Personen verheiratet werden können.

Begeben wir uns zunächst wieder auf einen (scheinbaren) Umweg. Sei  $M \subseteq E$  ein beliebiges Matching. Wir nennen eine Ecke  $v \in V$  ungepaart (oder frei), falls  $v$  von keiner Matching Kante getroffen wird. Es ist also  $v \notin \{a, b\}$  für alle  $ab \in M$ . Die Menge der freien Knoten zusammen mit den Matching Kanten bilden eine Cliquesüberdeckung von  $G$ . Also gilt

$$\kappa(G) \leq |M| + (n - 2|M|) = n - |M|$$

denn es gibt  $n - 2|M|$  freie Knoten in  $G$ . Anders formuliert, es gilt stets  $|M| \leq n - \kappa(G)$ . Ein Träger (oder Vertex Cover) in einem Graphen  $G$  ist eine Teilmenge  $T \subseteq V$ , die jede Kante trifft. Dies bedeutet, für alle  $ab \in E$  gilt  $a \in T$  oder  $b \in T$ .

Eine triviale Beobachtung zeigt, dass  $T$  genau dann ein Träger ist, wenn  $V \setminus T$  eine unabhängige Menge ist. Die Suche nach einem Träger minimaler Größe ist also äquivalent zu der Suche nach einer größtmöglichen unabhängigen Menge. Für alle Träger  $T$  gilt also  $|T| = n - \alpha(G)$ . Schließlich muss jede Matching Kante von mindestens einem Trägerpunkt getroffen werden. Dies liefert  $|M| \leq |T|$  für alle Matchings und alle Träger. Die Aussage, dass  $\alpha(G) = \kappa(G)$  für bipartite Graphen gilt, ist also äquivalent zu der Aussage, dass es für ein größtmögliches Matching einen Träger  $T$  gibt mit  $|M| = |T|$ . Dies ist der folgende Satz von König.

**Satz 17.1 König 1931**

*Beweis:* Sei  $M \subseteq E$  ein Matching von  $G$ . Ein einfacher Pfad  $P = (a_0, b_1, a_2, \dots, c_k)$ , der in einer freien Ecke  $a \in A$  beginnt und zwischen Nicht-Matching Kanten  $a_i b_{i+1}$  und Matching Kanten  $b_i a_{i+1}$  alterniert, heißt alternierender Weg. Endet ein alternierender Weg in einer freien Ecke  $c_k$ , so gilt  $c_k \in B$  und wir nennen den Weg einen Verbesserungsweg. Warum? Sei  $(a_0, b_1, \dots, a_{k-1}, b_k)$  ein Verbesserungsweg, so sind also  $a_0$  und  $a_k$  frei. Tauschen wir auf diesem Weg die Matching Kanten  $b_i a_{i+1}$  für  $1 \leq i < k$  gegen die Kanten  $a_{i-1} b_i$  für  $1 \leq i \leq k$  aus, so erhalten wir ein neues Matching mit maximal vielen Kanten. Dann gibt es keine Verbesserungswege. Wir definieren jetzt zu  $M$  eine Menge  $T$  wie folgt. Betrachte  $ab \in M$  mit  $b \in \beta$ . Endet ein alternierender Weg in  $b$ , so nehmen wir  $b$  in  $T$  auf. Endet kein alternierender Weg in  $b$ , so nehmen wir  $a$  in  $T$  auf. Damit gilt  $|M| = |T|$ . Zu zeigen bleibt, dass  $T$  ein Träger ist. Sei  $ab \in E$ , zu zeigen ist  $a \in T$  oder  $b \in T$ . Dies gilt, falls  $ab \in M$ . Sei also  $ab \notin M$  und  $a, b \notin T$ . Ist  $b$  nicht frei, also  $ba' \in M$  für ein  $a' \in A$ , so ist auch  $a$  nicht frei, denn ansonsten wäre  $(a, b)$  ein alternierender Weg, der in  $b$  endet. Damit wäre  $b \in T$ . Ist  $b$  frei, so kann  $a$  nicht frei sein, sonst wäre  $(a, b)$  sogar ein Verbesserungsweg.

Damit gibt es  $b'a \in M, ab \notin M, a \notin T$ . Zu zeigen ist  $b \in T$ . Wegen  $a \notin T$ , gibt es einen alternierenden Weg  $P'$ , der in  $b'$  endet. Dieser Weg kann  $a$  nicht benutzen, da Matchingkanten nicht aneinander stoßen und  $a$  nicht frei ist. Er kann  $b$  benutzen. Dann ist jedoch  $b$  nicht frei und dort endet ein alternierender Weg, nämlich ein Anfangsstück von  $P'$ . Also gilt  $b \in T$ . Benutzt  $P'$  nicht  $b$ , so kann  $P'$  durch  $(P, a, b)$  zu einem alternierenden Weg  $P$  ergänzt werden. Da  $|M|$  maximal viele Kanten enthält, ist dies kein Verbesserungsweg. Also ist  $b$  nicht frei, damit folgt erneut  $b \in T$ .  $\square$

Hier fehlt wohl et- was?!

# 18 Die Probabilistische Methode

Grundidee: Um zu zeigen, dass ein Objekt mit Eigenschaft  $X$  existiert, wird ein geeigneter Wahrscheinlichkeits-Raum eingeführt und gezeigt, dass  $\Pr[X] > 0$  gilt.  $\mathcal{G}(n, p)$  = Graphen mit Knotenmenge  $V = \{1, \dots, n\}$ , wobei jede Kante (unabhängig von den anderen Kanten) mit Wahrscheinlichkeit  $p$  eingezeichnet wird (und mit Wahrscheinlichkeit  $1 - p$  nicht eingezeichnet wird). Graphenparameter können nun als Zufallsvariable auf  $\mathcal{G}(n, p)$  interpretiert werden. Sei  $H$  ein fester Graph mit Knoten aus  $\{1, \dots, n\}$  mit  $n_H$  die Anzahl der Knoten von  $H$ ,  $e_H$  die Anzahl der Kanten. Es gilt  $\Pr[H \leq G] = p^{e_H}$ ,  $\Pr[H \leq G \text{ induziert}] = \Pr[H \leq G, \bar{H} \leq \bar{G}] = p^{e_H} \cdot (1 - p)^{\binom{n_H}{2} - e_H}$ . Bei nicht-fester Knotenmenge ist das Berechnen von  $\Pr[H \leq G]$  schwieriger.

**Lemma 18.1**  $\Pr[\alpha(G) \geq k] \leq \binom{n}{k} \cdot (1 - p)^{\binom{k}{2}}$

*Beweis:*

$$\Pr[\alpha(G) \geq k] \leq \sum_{\substack{U \subseteq V, |U|=k \\ \text{unabhängig}}} \Pr[U \leq G] = \binom{n}{k} \cdot (1 - p)^{\binom{k}{2}}$$

□

**Lemma 18.2 (Markov-Ungleichung)** Sei  $X \geq 0$  eine Zufallsvariable auf  $\mathcal{G}(n, p)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Dann

$$\Pr[X \geq a] \leq \frac{E[X]}{a}$$

*Beweis:*

$$E[X] = \sum_{G \in \mathcal{G}} X(G) \cdot P(G) \geq \sum_{\substack{G \in \mathcal{G} \\ X(G) \geq a}} X(G) \cdot P(G) \geq \sum_{\substack{G \in \mathcal{G} \\ X(G) \geq a}} a \cdot P(G) = a \cdot \Pr[X \geq a]$$

□

**Lemma 18.3** Sei  $X(G)$  die Anzahl der Kreise der Länge  $k$  in  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  für ein  $k \geq 3$ . Dann

$$E[X] = \frac{n^k}{2k} p^k$$

wobei  $n^{\underline{k}} = \underbrace{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - k + 1)}_{k \text{ Faktoren}}$ .

*Beweis:* Für jeden Kreis  $C$  der Länge  $k$  mit Knoten aus  $\{1, \dots, n\}$  definieren wir die charakteristische Zufallsvariable  $X_C$  durch

$$X_C(G) = \begin{cases} 1 & \text{falls } C \subseteq G \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit gilt  $E[X_C] = \Pr[C \subseteq G] = p^k$ . Es gibt  $n^k$  viele Knoten-Sequenzen der Länge  $k$ . Mehrere Sequenzen entsprechen allerdings dem selben Kreis. So kann der Anfangspunkt des Kreises gewählt werden und die Sequenz vorwärts und rückwärts gelesen werden. Damit gibt es  $\frac{n^k}{2k}$  viele Kreise der Länge  $k$  über der Knotenmenge  $V$ . Daher

$$E[X] = E\left[\sum_C X_C\right] = \sum_C E[X_C] = \frac{n^k}{2k} \cdot p^k$$

□

**Lemma 18.4** Sei  $k > 0$ ,  $p = p(n)$  gegeben mit  $p \geq \frac{6k \ln(n)}{n}$  für genügend großes  $n$ . Dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[\alpha(G) \geq \frac{n}{2k}] = 0$ .

*Beweis:*

$$\Pr[\alpha(G) \geq r] \leq \binom{n}{r} (1-p)^{\binom{r}{2}} \leq n^r (1-p)^{\binom{r}{2}} = \left(n(1-p)^{\frac{r-1}{2}}\right)^r \stackrel{1+x \leq e^x}{\leq} \left(ne^{-p \frac{r-1}{2}}\right)^r$$

Für  $p \geq \frac{6k \ln(n)}{n}$  und  $r \geq \frac{n}{2k}$  gilt nun

$$ne^{-p \frac{r-1}{2}} = ne^{-\frac{pr}{2} + \frac{p}{2}} \leq ne^{-\frac{3}{2} \ln(n) + \frac{p}{2}} \leq n \cdot n^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Mit  $r = \frac{n}{2k}$  folgt die Behauptung. □

**Satz 18.5 (Erdős 1959)** Zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  gibt es einen Graphen  $G$  mit Tailleweite  $g(G) > k$  und  $\chi(G) > k$ .

*Beweis:* Sei  $0 < \varepsilon < \frac{1}{k}$  fest und  $p = n^{\varepsilon-1}$ .  $X(G)$  sei die Anzahl der Kreise der Länge  $\leq k$ . Nach vorigem Lemma 18.3 gilt in  $\mathcal{G}(n, p)$

$$E[X] = \sum_{i=3}^k \frac{n^i}{2i} \cdot p^i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=3}^k n^i p^i = \frac{1}{2} \sum_{i=3}^k \underbrace{(np)^i}_{n^{\varepsilon \geq 1}} \leq \frac{1}{2} (k-2) n^k p^k$$

Mit der Markov-Ungleichung (18.2)

$$\Pr\left[X \geq \frac{n}{2}\right] \leq \frac{2E[X]}{n} \leq (k-2)n^{k-1}p^k = (k-2)n^{k-1}n^{(\varepsilon-1)k} = (k-2)n^{k\varepsilon-1}$$

Da  $k\varepsilon-1 < 0$  ist, folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left[X \geq \frac{n}{2}\right] = 0$ . Sei nun  $n$  so groß, dass  $\Pr\left[X \geq \frac{n}{2}\right] < \frac{1}{2}$  und  $\Pr\left[\alpha \geq \frac{n}{2k}\right] < \frac{1}{2}$ . Dann gibt es  $H \in \mathcal{G}(n, p)$  mit  $\alpha(H) < \frac{n}{2k}$  und weniger als  $\frac{n}{2}$  viele Kreise der Länge  $\leq k$ . Aus jedem Kreis der Länge  $\leq k$  entfernen wir einen Knoten. Der entstandene Graph hat noch mindestens  $\frac{n}{2}$  viele Knoten und enthält keine Kreise der Länge  $\leq k$  mehr, d.h.  $g(G) > k$ . Weiter gilt

$$\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \geq \frac{\frac{n}{2}}{\alpha(H)} > k$$

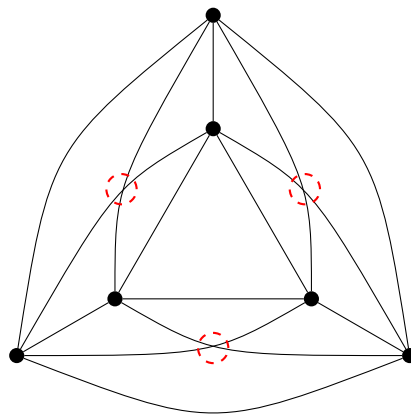
Hierbei ist  $V(G)$  die Knotenmenge von  $G$ . □

# 19 Die Probabilistische Lupe

## 19.1 Die Kreuzungszahl

$cr(G)$  = Kreuzungszahl von  $G$  = minimale Anzahl an Kantenkreuzungen die nötig ist, um  $G$  in die Ebene zu zeichnen.

### Beispiel 19.1



$$K_6 \\ cr(K_6) = 3$$

◇

**Satz 19.2 (Kreuzungslemma)** Sei  $e \geq 4n$ , dann gilt  $cr(G) \geq \frac{e^3}{64n^2}$ .

*Beweis:*  $cr(G) > e - 3n$ . Entferne aus jeder Kreuzung eine Kante. Mit Korollar 8.4 folgt  $e - cr(G) \leq 3n - 6 < 3n$ . Sei  $0 < p < 1$ . Wir wählen  $H \subseteq G$  zufällig, indem wir jeden Knoten mit Wahrscheinlichkeit  $p$  aufnehmen; Kanten werden automatisch aufgenommen, sobald die beiden Endknoten aufgenommen sind.  $n_H$  = Anzahl der Knoten von  $H$ ,  $e_H$  = Anzahl Kanten von  $H$ .  $cr_H$  = Anzahl der Überschneidungen in  $H$  welche sich aus der Zeichnung von  $G$  ergeben.  $cr_H \geq cr(H) \geq e_H - 3n_H$ . Erwartungswerte

$$E[cr_H] \geq E[e_H] - 3E[n_H]$$

Es gilt  $E[n_H] = pn$ ,  $E[e_H] = p^2e$ ,  $E[cr_H] = p^4 cr(G)$ .  $\Rightarrow p^4 cr(G) \geq p^2e - 3pn \Rightarrow cr(G) \geq \frac{e}{p^2} - \frac{3n}{p^3}$ . Setze  $p := \frac{4n}{e} \leq 1$ .  $\Rightarrow cr(G) \geq \frac{1}{64} \left( \frac{4e^3}{n^2} - \frac{3n}{(\frac{n}{e})^3} \right) = \frac{1}{64} \frac{e^3}{n^2}$  □



# 20 Extremale Graphentheorie

**Definition 20.1** Sei  $\mathcal{H}$  eine Familie von Graphen und  $ex_n(\mathcal{H})$  die maximale Anzahl an Kanten, die ein Graph mit  $n$  Knoten besitzen kann, ohne einen Untergraph  $H \in \mathcal{H}$  zu enthalten. Wir sagen  $G$  ist  $\mathcal{H}$ -extremal, falls  $e = ex_n(\mathcal{H})$  und  $G$  enthält keinen Untergraph  $H \in \mathcal{H}$ .

**Beispiel 20.2**  $ex_n(\{C_\ell\}_{\ell \geq 3}) \leq n-1$ . Bäume sind kreisfrei und besitzen  $n-1$  Kanten, daher gilt  $ex_n(\{C_\ell\}_{\ell \geq 3}) = n-1$ .  $\diamond$

**Satz 20.3 (Mantel 1907)** Sei  $G$  ein dreiecksfreier Graph. Dann gilt  $e \leq \frac{n^2}{4}$ , d.h.  $ex_n(K_3) \leq \frac{n^2}{4}$

*Beweis (1):* Sei  $G$  ein dreiecksfreier Graph und sei  $T$  eine minimale Knotenüberdeckung, d.h.  $|T| = \tau(G)$ .

$$e \stackrel{(a)}{\leq} \sum_{x \in T} d_x \stackrel{(b)}{\leq} \sum_{x \in T} \alpha(G) = \tau(G) \cdot \alpha(G) \stackrel{(c)}{\leq} \left( \frac{\tau(G) + \alpha(G)}{2} \right)^2 \stackrel{(d)}{=} \frac{n^2}{4}$$

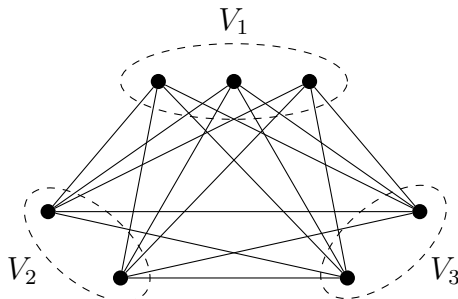
Die Ungleichung (a) gilt nach der Definition der Knotenüberdeckung. Aussage (b) gilt, da die Nachbarn von  $x$  eine unabhängige Menge bilden. Ungleichung (c) erhalten wir mit Hilfe der Abschätzung  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ , (d) gilt nach Satz (10.4 g).  $\square$

*Beweis (2):* Sei  $G$  dreiecksfrei, d.h.  $K_3$  ist die größte Clique. Jeder Knoten  $x \in V$  erhält ein Gewicht  $w_x$  mit  $w_x \geq 0$  und  $\sum_{x \in V} w_x = 1$ . Wir wollen  $w = \sum_{xy \in E} w_x w_y$  maximieren. Sei  $v_x$  die Summe der Gewichte der Nachbarn von  $x$ , analog  $v_y$ .  $\text{G} v_x \geq v_y$ . Wegen  $(w_x + \varepsilon)v_x + (w_y - \varepsilon)v_y \geq w_x v_x + w_y v_y$  können wir das Gewicht von  $y$  zu  $x$  verschieben, ohne dass das Gesamtgewicht  $w$  verringert wird. Wir können also annehmen, dass von zwei nicht verbundenen Knoten mindestens einer Gewicht 0 hat. Es folgt, dass sich das gesamte Gewicht auf eine Clique zentriert. Die größte Clique ist eine Kante  $xy$ ; Das Gesamtgewicht  $w$  ist maximal bei  $w_x = \frac{1}{2}$ ,  $w_y = \frac{1}{2}$ , d.h.  $w = \frac{1}{4}$ . Für die Gewichte  $w_x = \frac{1}{n}$  für alle  $x \in V$ , gilt  $e \cdot \frac{1}{n^2} = \sum_{xy \in E} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq w = \frac{1}{4}$ .  $\square$

**Definition 20.4 (vollständiger multipartiter Graph)** Ein Graph  $K_{n_1, \dots, n_q} = (V, E)$  mit  $V = V_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_q$ ,  $|V_i| = n_i$ ,  $E = \bigcup_{i \neq j} V_i \times V_j$  heißt vollständiger multipartiter Graph.

**Definition 20.5 (Turán-Graph)** Ein Graph  $T_n(r) = K_{\lceil \frac{n}{r} \rceil, \dots, \lceil \frac{n}{r} \rceil, \lfloor \frac{n}{r} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{n}{r} \rfloor}$  mit  $n \bmod r$  vielen Teilmengen  $V_i$  mit  $|V_i| = \lceil \frac{n}{r} \rceil$  und  $r - (n \bmod r)$  vielen Teilmengen  $V_i$  mit  $|V_i| = \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ , heißt Turán-Graph. Es sei  $t_n(r)$  die Anzahl der Kanten von  $T_n(r)$ .

**Beispiele 20.6**  $T_7(3) = K_{3,2,2}$ ,  $t_7(3) = 16$



◇

Sei  $n = pr + q$ ,  $0 \leq q < r$ . Dann gilt  $t_n(r) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2} - \frac{q(r-q)}{2r}$ .

**Satz 20.7 (Turán 1941)**  $ex_n(K_{r+1}) = t_n(r)$

*Beweis:* “ $\geq$ ” ist klar, da  $T_n(r)$  keinen  $K_{r+1}$  enthält. “ $\leq$ ”: Sei  $G$   $K_{r+1}$ -extremal, sei  $n = pr + q$ ,  $0 \leq q < r$ . Wir führen eine Induktion nach  $n$  durch. Ist  $n \leq r$ , so gilt  $G = K_n = T_n(r)$ . Sei nun  $n > r$ . Durch Hinzufügen einer Kante  $e \notin E \stackrel{n>r}{\neq} \binom{V}{2}$  entsteht ein  $K_{r+1}$ , daher muss  $G$  einen  $K_r$  enthalten. Sei  $H$  dieser  $K_r$  in  $G$ . Jeder der verbleibenden  $n - r$  Knoten aus  $G \setminus H$  hat höchstens  $r - 1$  Nachbarn in  $H$ .  $G \setminus H$  ist  $K_{r+1}$  frei. Nach Induktionsvoraussetzung hat  $G \setminus H$  höchstens  $t_{n-r}(r)$  Kanten. In  $G$  gilt  $e \leq t_{n-r}(r) + \binom{r}{2} + (n - r)(r - 1) = t_n(r)$ . □

**Bemerkung 20.8** *Beweis (2) vom Satz (20.3) von Mantel würde  $ex_n(K_{r+1}) \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2}$  liefern.*

**Satz 20.9**  $g(G) \geq 5 \Rightarrow e \leq \frac{1}{2}n\sqrt{n-1}$ , d.h.  $ex_n(\{C_3, C_4\}) \leq \frac{1}{2}n\sqrt{n-1}$ .

*Beweis:* Sei  $g(G) \geq 5$ . Seien  $y_1, \dots, y_d$  die Nachbarn von  $x$ ,  $d_x = d$ .  $y_1, \dots, y_d$  bilden unabhängige Menge (da  $G$  ist  $C_3$  frei).  $y_i$  und  $y_j$  haben für  $i \neq j$  nur  $x$  als gemeinsamen Nachbarn. Es gilt also  $(d_{y_1} - 1) + \dots + (d_{y_d} - 1) + d + 1 \leq n \Rightarrow$

$$\sum_{xy \in E} d_y \leq n - 1 \Rightarrow n(n - 1) \geq \sum_{x \in V} \sum_{xy \in E} d_y \stackrel{(*)}{=} \sum_{y \in V} d_y^2 \stackrel{\text{Varianz} \geq 0}{\geq} \frac{1}{n} \left( \sum_{y \in V} d_y \right)^2 = \frac{1}{n} (2e)^2$$

(\*) gilt, da  $d_y$  bei jedem der  $d_y$  vielen Nachbarn  $x$  von  $y$  gezählt. □

**Definition 20.10 (Hamilton-Pfad, Hamilton-Kreis)** *Ein Hamilton-Pfad ist ein Weg, der alle Knoten genau einmal besucht. Ein Hamilton-Kreis (HC) ist ein Kreis, der alle Knoten genau einmal besucht.*

**Satz 20.11** *Falls  $d_x \geq \frac{n}{2}$  für alle  $x \in V$ , so besitzt  $G$  einen HC.*

*Beweis:* Angenommen es ist  $d_x \geq \frac{n}{2}$  und  $G$  besitzt keinen  $HC$ ,  $\mathbb{E} e$  maximal. Sei  $xy \notin E$ . Maximalität liefert  $G' = (V, E \cup \{xy\})$  besitzt  $HC$ . Es existiert ein  $HC$   $x = z_1, \dots, z_n, z_{n+1} = x$  mit  $z_n = y$  in  $G'$ , da der  $HC$  die Kante  $xy$  benutzen muss.  $x = z_1, \dots, z_n = y$  ist Hamilton-Pfad in  $G$ . Setze  $X := \{i \mid xz_{i+1} \in E\} \not\cong n$ ,  $Y := \{i \mid yz_i \in E\} \not\cong n$ , dabei gilt  $|X| = d_x \geq \frac{n}{2}$  und  $|Y| = d_y \geq \frac{n}{2}$ . Daher existiert ein  $i \in X \cap Y$ . Dann ist  $x = z_1, \dots, z_i, y = z_n, z_{n-1}, \dots, z_{i+1}, x$  ein  $HC$  in  $G$ , im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

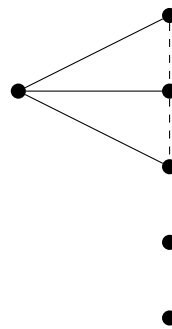
# 21 Eigenwerte von Graphen

TODO

# 22 Ramsey-Theorie

Grundidee: Wenn ein Objekt groß genug ist, dann ist eine gewisse Eigenschaft unvermeidbar.

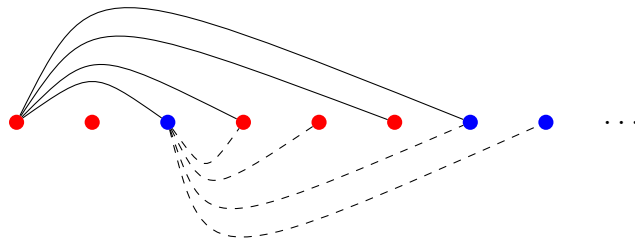
**Beispiel 22.1** Bei einem Graphen mit mindestens 6 Knoten ist eine Clique oder eine unabhängige Menge der Größe 3 unvermeidbar.



◇

**Satz 22.2 (Ramsey, unendliche Version)** *Ein unendlicher Graph enthält eine Clique oder eine unabhängige Menge mit unendlich vielen Knoten.*

*Beweis (Skizze):* TODO Beschreibung



□

- Mehr Farben (nur endlich viele) ✓
- Hypergraphen  $E \subseteq \binom{V}{k}$  ✓
- endliche Graphen ?

**Satz 22.3 (Ramsey 1930)** Sei  $k \geq 1$  und  $q_i \geq k$  für  $1 \leq i \leq s$  ( $s = \text{Anzahl der Farben}$ ). Es existiert eine minimale Zahl  $R_k(q_1, \dots, q_s)$  mit folgender Eigenschaft. Sei  $V$  eine Menge mit  $n$  Elementen und  $c : \binom{V}{k} \rightarrow \{1, \dots, s\}$  eine Färbung der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $V$  mit  $s$  Farben. Wenn  $n \geq R_k(q_1, \dots, q_s)$ , dann existiert  $i \in \{1, \dots, s\}$  und  $A \subseteq V$  mit  $|A| = q_i$  und  $c(X) = i$  für alle  $X \in \binom{A}{k}$ .

*Beweis:* Sei zunächst  $s = 2$ .

(a) Für  $k = 1$  gilt  $R_1(p, q) = p + q - 1$

(b) Für  $p \geq k$  und  $q \geq k$  gilt  $R_k(p, k) = p$  und  $R_k(k, q) = q$

(c) Induktion nach  $(k, p + q)$

- Setze  $p_1 = R_k(p - 1, q)$  und  $q_1 = R_k(p, q - 1)$
- $V$  Menge mit  $|V| = n \geq 1 + R_{k-1}(p_1, q_1)$
- Sei  $c : \binom{V}{k} \rightarrow \{1, 2\}$  Färbung
- Sei  $x \in V$ .  $V' = V \setminus \{x\}$ . (Es gilt  $|V'| \geq R_{k-1}(p_1, q_1)$ .)
- Definiere  $c' : \binom{V'}{k-1} \rightarrow \{1, 2\}$ ,  $X \mapsto c(X \cup \{x\})$
- Es existiert  $A' \subseteq V'$  mit  $|A'| = p_1 = R_k(p - 1, q)$  und  $c'(X) = 1$  für alle  $X \in \binom{A'}{k-1}$
- 1.Fall:  $A'$  enthält  $B \subseteq A'$  mit  $|B| = q$  und  $c(X) = 2$  für alle  $X \in \binom{B}{k}$
- 2.Fall:  $A'$  enthält  $A'' \subseteq A'$  mit  $|A''| = p - 1$  und  $c(X) = 1$  für alle  $X \in \binom{A''}{k}$ . Setze  $A := A'' \cup \{x\}$ . Nun gilt für alle  $X \in \binom{A}{k}$ , dass  $c(X) = 1$ .  $|A| = p$  ✓.
- Insbesondere  $R_k(p, q) \leq 1 + R_{k-1}(R_k(p - 1, q), R_k(p, q - 1))$ .

Sei nun  $s \geq 3$ . Behauptung:  $R_k(q_1, \dots, q_s) \leq R_k(q_1, \dots, q_{s-2}, R_k(q_{s-1}, q_s))$ .

Beweis der Behauptung:

- Sei  $c : \binom{V}{k} \rightarrow \{1, \dots, s\}$ ,  $|V| \geq R_k(q_1, \dots, q_{s-2}, R_k(q_{s-1}, q_s))$
  - Setze  $c' : \binom{V}{k} \rightarrow \{1, \dots, s - 1\}$   $X \mapsto \begin{cases} c(X) & c(X) \leq s - 1 \\ s - 1 & c(X) = s \end{cases}$
- (d.h. wir identifizieren  $s$  und  $s - 1$ )

1.Fall:  $\exists A_i \subseteq V$  mit  $i \leq s - 2$  und  $|A_i| = q_i$  und  $c'(X) = i = c(X) \forall X \in \binom{A_i}{k}$ .

2.Fall:  $\exists A' \subseteq V$  mit  $|A'| = R_k(q_{s-1}, q_s)$  und  $c'(X) = s - 1 \forall X \in \binom{A'}{k} \Rightarrow$  geeignete Teilmenge  $A_{s-1} \subseteq A'$  oder  $A_s \subseteq A'$ . □

**Korollar 22.4**  $R_2(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$

*Beweis:*  $p = 2$  oder  $q = 2$ :  $R_2(2, q) = q = \binom{2+q-2}{1}$ ,  $R_2(p, 2) = \binom{p+2-2}{p-1}$

$$\begin{aligned} R_2(p, q) &\leq 1 + R_1(R_2(p-1, q), R_2(p, q-1)) \\ &\stackrel{(a)}{=} 1 + R_2(p-1, q) + R_2(p, q-1) - 1 \\ &\stackrel{IV}{\leq} \binom{p-1+q-2}{p-2} + \binom{p+q-1-2}{p-1} \\ &= \binom{p+q-2}{p-1} \end{aligned}$$

□

**Korollar 22.5**  $R_2(p, p) \leq 2^{2p-2}$  (da  $\binom{2(p-1)}{p-1} \leq 2^{2(p-1)}$ ).

**Satz 22.6**  $R_2(p, p) \geq 2^{\frac{p}{2}}$  für  $p \geq 3$

*Beweis:*  $\forall p \geq 4$ . Betrachte  $K_n$ . Es existieren  $2^{\binom{n}{2}}$  Kantenfärbungen mit 2 Farben. Sei  $K_p$  ein Untergraph von  $K_n$  fest.  $\Rightarrow$  Es existieren höchstens  $2^{\binom{n}{2} - \binom{p}{2} + 1}$  Färbungen, bei denen  $K_p$  einfarbig ist. Damit eine einfarbige Teilmenge der Größe  $p$  existiert, muss insbesondere  $\binom{n}{p} \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{p}{2} + 1} \geq 2^{\binom{n}{2}}$ . Für  $n < 2^{\frac{p}{2}}$  gilt aber:

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n}{p} \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{p}{2} + 1}}{2^{\binom{n}{2}}} &\leq \frac{n^p}{2^p} \cdot 2^{-\binom{p}{2} + 1} \\ &< \frac{2^{\frac{p^2}{2}}}{2^p} \cdot 2^{-\frac{p^2}{2} + \frac{p}{2} + 1} \\ &= 2^{-p + \frac{p}{2} + 1} \\ &< 1 \end{aligned}$$

□

**Definition 22.7** Halbordnung

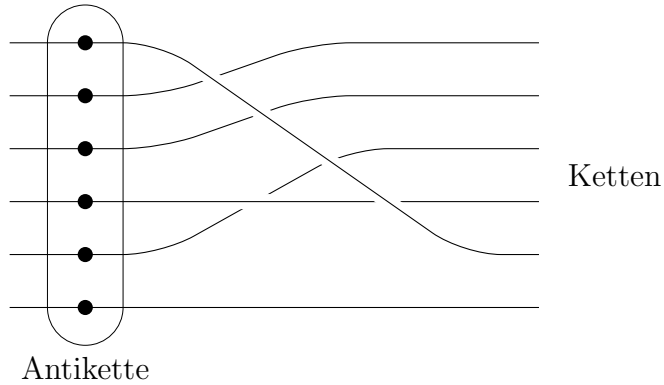
- *irreflexiv, transitiv* (entspricht " $<$ ")
- *reflexiv, antisymmetrisch, transitiv* (entspricht " $\leq$ ")

Eine Relation  $R \subseteq P \times P$  heißt genau dann antisymmetrisch, wenn  $a = b$  aus  $(a, b), (b, a) \in R$  folgt. Eine *lineare* (auch *totale*) Ordnung = Halbordnung  $(P, \leq)$  mit  $\forall x, y \in P : x \leq y$  oder  $y \leq x$ . (Analogon zu vollständigen Graphen)

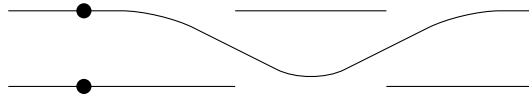
Kette = linear geordnete Teilmenge (Analogon zu Cliques)

Antikette = Teilmenge von paarweise unvergleichbaren Elementen (Analogon zu unabhängige Menge)

**Satz 22.8 (Dilworth 1950)** Sei  $(P, \leq)$  eine endliche Halbordnung. Dann ist die minimale Anzahl  $m$  von disjunkten Ketten, welche  $P$  überdecken gleich der maximalen Größe  $M$  einer Antikette.

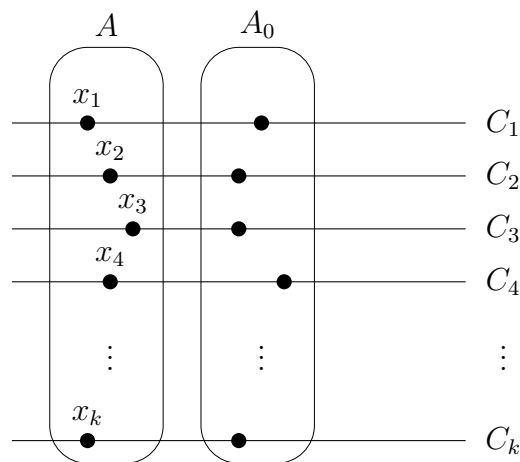


Der Satz ist nicht trivial:



Wir werden zeigen, dass in diesem Fall die Ketten schlecht gewählt sind.

*Beweis:*  $m \geq M$  ist klar, da Elemente aus einer Antikette in verschiedenen Ketten liegen. Mit Induktion nach  $|P|$  zeigen wir, dass Zerlegungen in  $k$  Ketten und eine Antikette der Größe  $k$  existieren für ein  $k \in \mathbb{N}$ . [ $m \leq k \leq M$ ]. Der Fall  $P = \emptyset$  ist trivial. Sei also  $P \neq \emptyset$  und  $a \in P$  minimal ( $\nexists b \in P, b < a$ ). Mit Induktion kann  $P' := P \setminus \{a\}$  mit disjunkten Antiketten  $C_1, \dots, C_k$  überdeckt werden und es existiert eine Antikette  $A_0 \subseteq P'$  mit  $|A_0| = k$ . Für alle  $i$  ist  $A_0 \cap C_i \neq \emptyset$ . Sei  $x_i \in C_i$  das kleinste Element, welches zu einer Antikette der Größe  $k$  gehört





Setze  $A := \{x_1, \dots, x_k\}$ . Behauptung:  $A$  ist Antikette. Beweis: Sei  $A_1$  eine Antikette,  $|A_1| = k$ ,  $x_1 \in A_1$ . Sei  $y \in A_1 \cap C_2$ . Dann  $x_2 \leq y$ , woraus  $x_1 \not\leq x_2$  folgt (sonst  $x_1 \leq y$ ). Analog  $x_i \not\leq x_j$  für alle  $i \neq j$ . Also ist  $A$  Antikette. Zurück zu  $P$ :  $A \cup \{a\}$

Größe  $k+1$

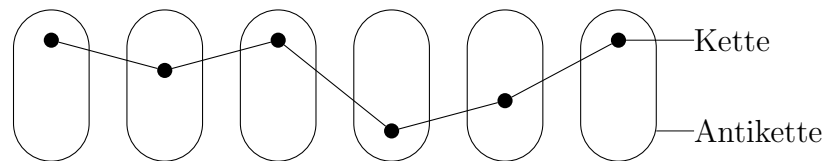
Antikette. Es folgt  $\{a\}, C_1, \dots, C_k$  sind  $k+1$  disjunkte Antiketten. Sei also  $a \leq x_i$ ,  $K := \{a\} \cup \{z \in C_i \mid x_i \leq z\}$ . Nach Wahl von  $x_i$  besitzt  $P \setminus K$  keine Antikette der Größe  $k$ . Mit Induktion:  $P \setminus K$  zerfällt in  $k-1$  Ketten. Zusammen mit  $K$  sind dies  $k$  disjunkte Ketten. Unabhängige Menge  $A$ ,  $|A| = k$ . □

Mögliche Korollare:

- Heiratssatz (bipartite Graphen  $(A \dot{\cup} B, E)$  sind TROs. Heiratsbedingung liefert “ $B$  ist maximale Antikette”. Dilworth liefert  $\geq |B|$  disjunkte Ketten (Kanten und einzelne Knoten). Die Kanten davon sind perfektes Matching.)
- TROs sind perfekt (Antikette  $\hat{=}$  unabhängige Menge, Ketten  $\hat{=}$  Cliquenüberdeckung)
- Eine Halbordnung mit  $n^2 + 1$  Elementen besitzt Kette oder Antikette der Größe  $n + 1$  (Schubfachprinzip).

Duales Resultat:

**Satz 22.9 (Mirsky 1971)**  $(P, \leq)$  endliche Halbordnung, minimale Anzahl von disjunkten Antiketten, die  $P$  überdeckt = maximale Länge einer Kette.



*Beweis:* Analog zum Beweis dass TROs perfekt sind, 13.2. □

Typische Halbordnung: Potenzmenge  $2^X$  mit  $A \leq B :\Leftrightarrow A \subseteq B$ .  $k$ -Teilmenge = Teilmenge mit  $k$  Elementen.

**Satz 22.10** Sei  $\mathcal{A}$  eine Antikette von Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ . Dann

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1$$

*Beweis:* Für jede Teilmenge  $A \subseteq \{1, \dots, n\}$  gibt es genau  $|A|!(n-|A|)!$  viele maximale Ketten, welche  $A$  enthalten. Es gibt insgesamt  $n!$  viele maximale Ketten. Jedes  $A \in \mathcal{A}$  schneidet eine Kette in höchstens einem Element, d. h.

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n-|A|)! \leq n!$$

□

**Satz 22.11 (Sperner 1928)** Sei  $\mathcal{A}$  eine Antikette von Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ . Dann gilt

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

*Beweis:* Folgt aus Satz 22.10, da  $\binom{n}{k}$  für  $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  maximal ist. □

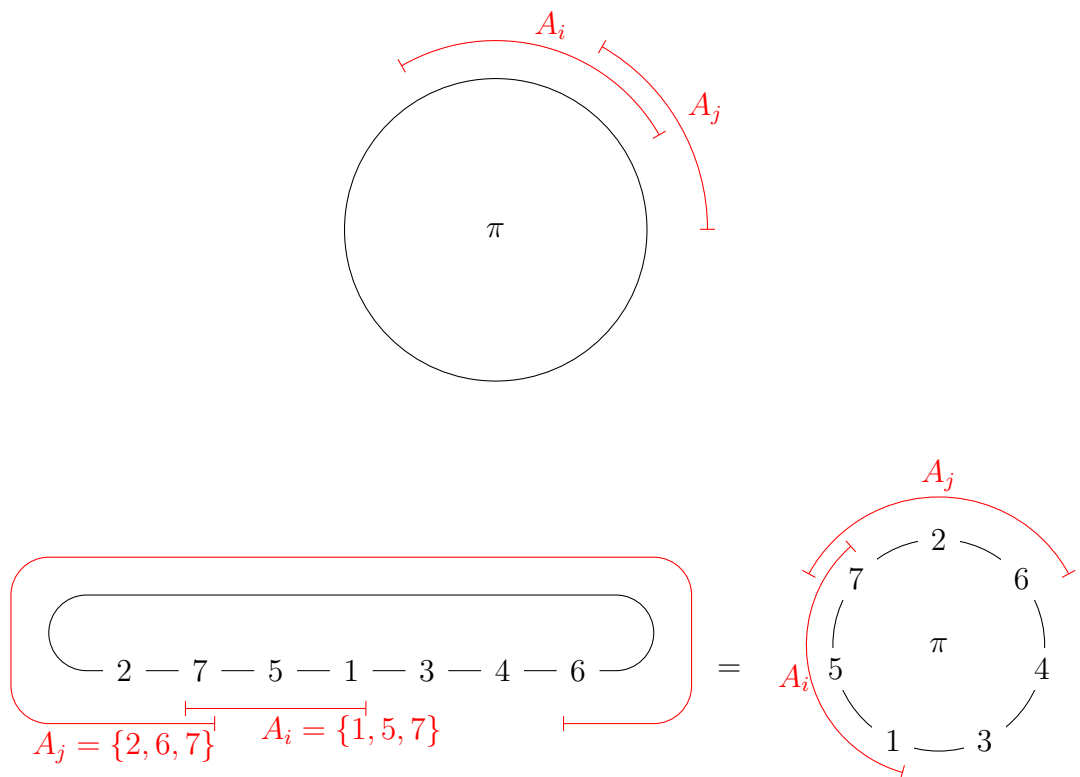
Gleichheit gilt für  $\mathcal{A} = \left\{ \binom{\{1, \dots, n\}}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\}$ .

Wir betrachten nun, wie sich die zusätzliche Forderung des nicht-leeren Schnitts von je zwei Elementen der Antikette im Satz 22.10 auswirkt.

**Satz 22.12 (Bollobás 1973)** Sei  $\mathcal{A}$  eine Antikette Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$  so, dass  $|A_i| \leq \frac{n}{2}$  und  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$  für alle  $A_i, A_j \in \mathcal{A}$  gilt. Dann

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n-1}{|A|-1} \leq 1$$

*Beweis:* Sei  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ . Wir ordnen jede Permutation  $\pi \in S_n$  auf einem Kreis an.  $A_i \in \pi \Leftrightarrow$  die Elemente aus  $A_i$  stehen direkt hinter einander auf dem Kreis von  $\pi$ .



Aus  $A_i \in \pi$  folgt, es existieren höchstens  $|A_i|$ -viele  $j \in \{1, \dots, m\}$  mit  $A_j \in \pi$ .

$$f(\pi, i) := \begin{cases} \frac{1}{|A_i|} & \text{falls } A_i \in \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun gilt

$$\sum_{\pi \in S_n} \underbrace{\sum_{i=1}^m f(\pi, i)}_{\leq 1} \leq n!$$

□

Für festes  $A_i$  gibt es  $|A_i|!(n - |A_i|)! \cdot n$  viele Permutationen  $\pi$  mit  $A_i \in \pi$ . Der Faktor  $n$  ergibt sich auf Grund der möglichen zyklischen Vertauschungen.

$$n! \geq \sum_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^n f(\pi, i) = \sum_{i=1}^n \sum_{\pi \in S_n} f(\pi, i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|A_i|} |A_i|!(n - |A_i|)! \cdot n$$

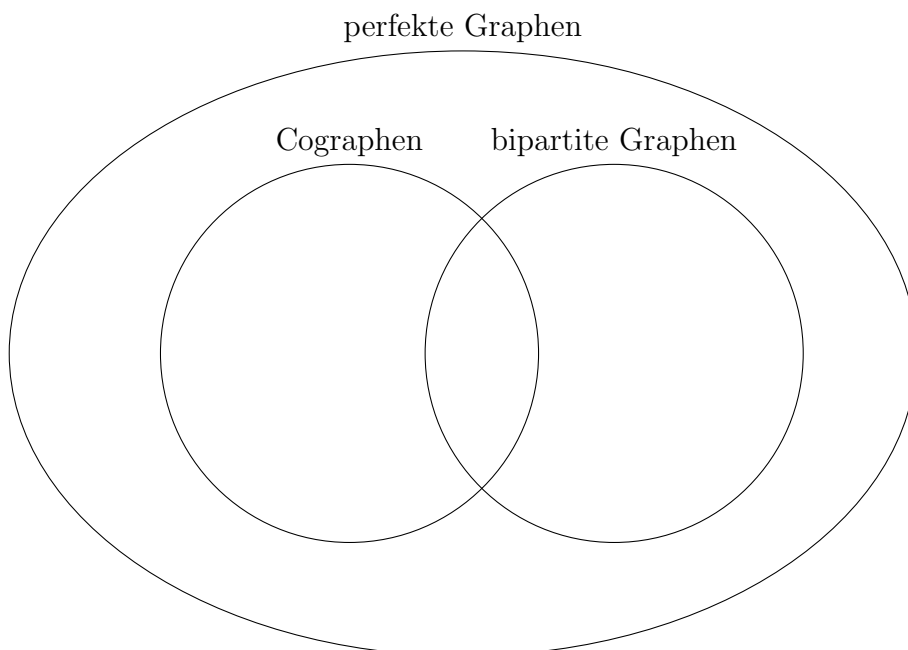
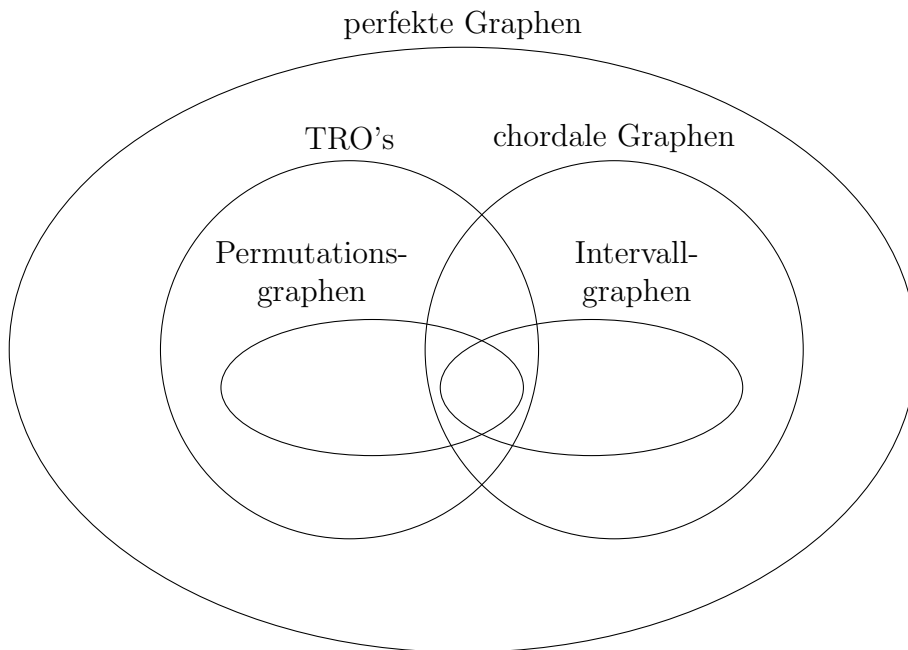
**Satz 22.13 (Erdős, Ko, Rado 1961)** Sei  $\mathcal{A}$  eine Familie von  $k$ -Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$  mit  $k \leq \frac{n}{2}$  und  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$  für alle  $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ . Dann

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1} \quad (22.1)$$

*Beweis:* Folgt aus Satz 22.12. □

Gleichheit gilt für  $\mathcal{A} = \{A \cup \{n\} \mid A \in \mathcal{A}'\}$  mit  $\mathcal{A}' = \binom{\{1, \dots, n-1\}}{k-1}$ .

# 23 Übersicht



# Literaturverzeichnis