Übungsblatt 0

Punkte: 0

Hertrampf, Mattes
FMI/TI, FMI/TI
Universität Stuttgart

Zum Ablauf der Übung:

Herzlich willkommen zu den Übungen zur Vorlesung Theoretische Informatik I. Zunächst ein paar Informationen zum Ablauf der Übungen.

ILIAS-Kurs: Informationen zu Vorlesung und Übung werden hauptsächlich auf der Lernplattform ILIAS veröffentlicht. Schauen Sie bitte regelmäßig in die entsprechenden Foren und stellen Sie Ihre Fragen zunächst in dem entsprechenden Forum.

Blatt 0: Dieses Blatt beinhaltet **keine** schriftlichen Aufgaben. Die einführenden Texte zur Mengenlehre und den Quantoren sind zum Selbststudium **vor** Beginn Ihrer ersten Übungsgruppe gedacht. Lesen Sie sich diese bitte durch und versuchen Sie, den Inhalt zu verstehen. Bereiten Sie Fragen für die Übung vor, falls Sie etwas nicht verstanden haben. Die zugehörigen Aufgaben (Aufgabe 1 und 2) werden in der Übung gemeinsam mit Ihrem Tutor besprochen. Sie dürfen trotzdem gerne versuchen, diese Aufgaben selbst zu lösen.

Blatt 1: Sie finden im ILIAS sowie auf der Website auch bereits Blatt 1. Dies ist das erste Blatt, welches schriftliche Aufgaben zum Abgeben enthält. Diese müssen Sie bis Freitag, 13.11. um 12Uhr (mittags) in der entsprechenden Gruppe im ILIAS hochgeladen haben. Spätere Abgaben werden nicht akzeptiert! Die Lösungen zu dem entsprechenden Übungsblatt werden dann in den Übungen in der folgenden Woche besprochen.

Weitere Blätter: Es wird ab dem 13.11. jeden zweiten Freitag um 12 Uhr ein neues Übungsblatt auf ILIAS und auf der Website erscheinen. Das nächste Blatt (Blatt 2) wird folglich am 13.11. um 12 Uhr veröffentlicht. Sie haben dann immer genau 2 Wochen Zeit, die Übungsaufgaben zu bearbeiten. Bitte beachten Sie die etwas kürzere Bearbeitungszeit des ersten Blattes.

Scheinkriterien: Um an der Modulprüfung der Theoretischen Informatik I teilnehmen zu können benötigen Sie einen Übungsschein. Diesen erhält, wer mindestens 50% aller in den schrftlichen Aufgaben erreichbaren Punkte erhält und zwei Mal im Laufe des Semesters die Lösung zu einer Übungsaufgabe in seiner Übung präsentiert hat. Bitte vermerken Sie in Ihrer Abgabe, welche Ihrer schriftlichen Lösungen Sie bereit wären, in der nächsten Übung zu präsentieren. Ihr Tutor wird dann jemanden mit der entsprechenden Markierung zum Vorrechnen auswählen.

Abgaben in Teams: Sie dürfen Ihre Lösungen zu den schriftlichen Übungsaufgaben in Teams von bis zu zwei Personen abgeben. Beide Teammitglieder sollten dabei in der selben Übungsgruppe sein. Sie dürfen innerhalb Ihrer Übungsgruppe Ihren Teampartner frei wählen, jedoch darf das Team nach der ersten Abgabe nicht mehr geändert werden. Sie bleiben dann für das ganze Semester im selben Team. Bitte achten Sie darauf, die Namen BEIDER Teammitglieder auf die Abgabe zu schreiben! Es wird im ILIAS in den entsprechenden Gruppen ein Forum eingerichtet werden zur Teambildung.

Wichtige Hinweise zu den Abgaben: Die Lösungen werden in handschriftlicher Form sowie in gedruckter (am Computer geschriebener) Form akzeptiert. Hier ist es sinnvoll (allerdings nicht verpflichtend) wenn Sie sich mit LaTex vertraut machen. Bitte achten Sie bei den schriftlichen Abgaben auf gute Lesbarkeit, insbesondere wenn Sie Ihre handschriftlichen Abgaben fotographieren oder einscannen! Achten Sie außerdem auf eine verständliche und mathematisch saubere und korrekte Darstellung Ihres Lösungsweges. Die Tutoren sind angehalten, Ihnen ansonsten Punkte abzuziehen.

Nun können wir mit der eigentlichen Übung beginnen. Vielleicht haben Sie bereits bemerkt, dass man, wenn man sich mit der Mathematik beschäftigt, zunächst eine neue Sprache lernen muss. Wir wollen nun ein paar erste Vokabeln dieser neuen Sprache einführen. Wir werden uns auf diesem Blatt zunächst mit der Mengenlehre beschäftigen und erste Quantoren einführen.

Mengenlehre

Stellen Sie sich zunächst vor, Sie treffen sich zu Beginn des Semesters mit Ihren Kommilitonen zum gemeinsamen Frühstück. Sie vereinbaren, dass jeder von Ihnen einen Obstsalat mitbringt. Sie wollen sich nun über Ihre Salate austauschen und dabei gleich das neu erworbene Wissen über die mathematische Sprache anwenden. Dazu betrachten Sie zunächst Ihren eigenen Obstsalat und möchten diesen als eine Menge, welche verschiedene Obstsorten enthält, beschreiben. Dies tun sie folgendermaßen:

$$\text{MeinObstsalat} = \{Birne, Apfel, Orange, Kiwi, Banane, Mandarine\}.$$

Ihr Obstsalat ist also eine Menge, welcher die Obstsorten Birne, Apfel, Kiwi, Banane und Mandarine enthält. Ihr Kommilitone isst sehr gerne Mango und stellt Ihnen daher die folgende Frage:

$$Mango \in \text{MeinObstsalat ?}$$

Sie müssen ihm dann leider antworten:

$$Mango \notin \text{MeinObstsalat}.$$

Was könnten die Symbole $\in$ und $\notin$ ausdrücken?

Ein weiterer Kommilitone fragt Sie dann, wie viele verschiedene Obstsorten sie denn verwendet haben. Sie können antworten:

$$|\text{MeinObstsalat}| = 6.$$

Wissen Sie bereits, wofür $|\ |$ verwendet wird? Der Obstsalat Ihres Nachbarn lässt sich folgendermaßen beschreiben:

$$\text{DeinObstsalat} = \{Mango, Banane, Pflaume, Birne, Erdbeere\}.$$

Sie möchten nun wissen, welche Obstsorten in beiden Obstsalaten enthalten sind. Ihr Ergebnis:

$$\text{MeinObstsalat} \cap \text{DeinObstsalat} = \{Birne, Banane\}.$$

Außerdem sind Sie daran interessiert was passieren würde, wenn Sie Ihre beiden Salate zusammen in eine große Schüssel kippen. Sie erhalten:

$$\text{MeinObstsalat} \cup \text{DeinObstsalat} = \{Birne, Apfel, Orange, Kiwi, Banane, Mandarine, Mango, Plaume, Erdbeere\}.$$

Was beschreiben also die Symbole $\cap$ und $\cup$?

Nun kommt Alice mit ihrem Obstsalat herein. Dieser lässt sich durch

$$\text{AliceObstsalat} = \{Birne, Kiwi, Mandarine, Banane\}$$

beschreiben. Ihr stellt fest:

$$\text{AliceObstsalat} \subseteq \text{MeinObstsalat aber auch MeinObstsalat} \not\subseteq \text{AliceObstsalat}$$

Was könnten die Symbole $\subseteq$ und $\not\subseteq$ also bedeuten?

Nun sind alle angekommen und Sie wollen schöne Bilder der Obstsalate machen. Die Menge aller Obstsalate nennen Sie $\mathcal{O}$. Nun wollen Sie herausfinden, welche Obstsalate am besten zusammen passen und betrachten alle möglichen Kombinationen. Sie müssen somit alle Elemente aus der folgenden Menge betrachten:

$$2^{\mathcal{O}} = \{\{S_1, \ldots, S_\ell\} \mid 0 \leq \ell \leq |\mathcal{O}|,\ S_i \in \mathcal{O}\ \forall i = 1 \leq i \leq \ell\}$$

Sie betrachten also die Menge aller Teilmengen von $\mathcal{O}$. Welches Element von $2^{\mathcal{O}}$ erhalten Sie, wenn $\ell = 0$?

Alice isst sehr gerne Kiwi und Banane, daher isst sie diese zuerst. Nun betrachtet sie, was von ihrem Obstsalat noch übring ist:

$$\text{RestAliceObstsalat} = \text{AliceObstsalat} \setminus \{Kiwi, Banane\} = \{Birne, Mandarine\}.$$

Nun ist das Frühstück beendet, und Ihr Obstsalat ist aufgegessen. Ihr Obstsalat kann nun also durch

$$\text{MeinObstsalat} = \emptyset$$

beschrieben werden. Was vermuten Sie, wofür steht das Symbol $\emptyset$? Nun etwas mathematischer:

Eine Menge ist also eine Zusammenfassung von Objekten. Wir haben gesehen, dass man eine Menge darstellen kann, indem man alle in ihr enthaltenen Elemente aufzählt. Man kann eine Menge jedoch auch angeben, indem man die Eigenschaften angibt welche ein Element erfüllen muss, um in der Menge enthalten zu sein. Zum Beispiel können Sie bei der Überlegung wo Sie sich für ihr Frühstück treffen die folgende Menge betrachten:

$$\text{MöglicheTreffpunkte} = \{R \mid R \text{ ist Seminarraum an der Universität.}\}.$$

Seien nun A und B Mengen. Sie kennen nun die folgenden Symbole und Schreibweisen:

- Die Symbole $\in$, $\notin$ um auszudrücken, dass ein Element in einer Menge enthalten bzw nicht enthalten ist.
- Die Symbole $\subseteq$, $\not\subseteq$ um auszudrücken, dass eine Menge A eine *Teilmenge* einer Menge B ist oder, dass A *keine Teilmenge* von B ist. ACHTUNG: $A \not\subseteq B$ bedeutet NICHT, dass A und B keine gemeinsamen Elemente haben dürfen. Es gilt außerdem, dass $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ UND $B \subseteq A$ gilt.

- Die Potenzmenge von A is die Menge 2^A aller Teilmengen von A. Diese enthält auch die leere Menge und die Menge A selbst!
- Das Symbol $\cap$ für den Schnitt zweier Mengen und das Symbol $\cup$ für die Vereinigung zweier Mengen. Wir können den Schnitt und die Vereinigung nicht nur von einer, sondern von beliebig vielen Mengen betrachten.
- Das Symbol $\emptyset$ für die leere Menge.
- Die Schreibweise $A \setminus B$ um auszudrücken, dass Sie die Menge A ohne die Elemente aus B betrachten.
- Die Schreibweise $|A|$ um die Anzahl der Elemente in A anzugeben.

Vielleicht ist Ihnen schon aufgefallen, dass es für Ihren Obstsalat keine Rolle spielt, ob sie zuerst die Birnen und dann die Äpfel hinein schneiden oder umgekehrt. Ebenso bei Mengen, auch hier spielt die Reihenfolge der Elemente keine Rolle.

ACHTUNG: Unterscheiden Sie gut, ob sie mit einzelnen Elementen oder mit Mengen arbeiten! Dies sind verschiedene Objekte, die sie lernen sollten zu unterscheiden.

Quantoren

Gehen wir wieder zurück zu Ihren Obstsalaten. Bei einem Vergleich stellen Sie fest, dass alle Ihre Kommilitonen die Obstsorte Banane in ihrem Obstsalat haben. Dies wollen Sie nun unter Verwendung weiterer mathematischer Vokabeln ausdrücken, den *Quantoren*. Wir hatten bereits die Bezeichnung $\mathcal{O}$ für die Menge aller Obstsalate eingeführt. Wir verwenden im Folgenden den Buchstaben F als Platzhalter für die Obstsorte. Sie können nun also sagen:

$$\forall S \in \mathcal{O}\ \exists F \in S : \text{ Die Obstsorte von } F \text{ ist Banane.}$$

Haben Sie schon eine Vermutung, was die Symbole $\forall$ und $\exists$ bedeuten könnten?
Sie schauen sich weiter um und stellen fest, dass Bob der einzige Ihrer Kommilitonen ist, der Ananas in seinem Obtsalat hat. Sie drücken dies aus, indem Sie den folgenden Ausdruck an die Tafel schreiben:

$$\exists! S \in \mathcal{O} : \ \exists F \in S : \text{ Die Obstsorte von } F \text{ ist Ananas.}$$

Können Sie erraten, was das Symbol $\exists!$ bedeutet und was der Unterschied zu $\exists$ sein könnte?
Außerdem stellen Sie fest, dass niemand daran gedacht hat, Heidelbeeren seinem Obstsalat beizugeben. Sie schreiben folgendes an die Tafel:

$$\neg \left(\exists S \in \mathcal{O} : \ \exists F \in S : \text{ Die Obstsorte von } F \text{ ist Heidelbeere.}\right).$$

Was könnte also das Symbol $\neg$ bedeuten?

Fassen wir zusammen, welche Quantoren wir nun kennen gelernt haben.

- $\forall$: Sprich: Für alle. Wird verwendet um auszudrücken, dass ALLE Elemente einer Menge eine bestimmte Eigenschaft besitzen.
- $\exists$: Sprich: Es existiert. Wird verwendet um auszudrücken, dass in einer Menge MINDESTENS EIN Element mit einer bestimmten Eigenschaft existiert.
- $\exists!$: Sprich: Es existiert genau ein. Wird verwendet um auszudrücken, dass in einer Menge GENAU EIN Element mit einer bestimmten Eigenschaft existiert.
- $\neg$: Sprich: Nicht. Wird verwendet, um eine Aussage, die getroffen wurde zu negieren.

ACHTUNG: Unterscheiden Sie gut zwischen $\exists$ und $\exists!$. Auch bei der Verwendung von $\neg$ können für den Ungeübten einige Fallen lauern. Nehmen Sie an, Sie unterhalten sich beim Frühstück mit Ihren Kommilitonen darüber, wie oft Sie im Alltag Obst essen. Bob meint dann:

$$\neg\left(\forall T, T \text{ Tag im Jahr 2020}: \text{ Bob hat am Tag } T \text{ Obst gegessen.}\right).$$

Sie schauen Bob erstaunt an und fragen sich, wie er es schafft so gesund auszusehen, wenn er in diesem Jahr noch kein Obst gegessen hat. Aber ist Bob wirklich so ein Vitamin-Muffel oder könnte er auch etwas anderes gemeint haben?

Nun zunächst einige etwas formalere Definitionen der oben genannten Begriffe, bevor wir zu den Aufgaben übergehen.

- $A \subseteq B$ genau dann, wenn $\forall a \in A : a \in B$. $A \not\subseteq B$ genau dann, wenn $\exists a \in A : a \notin B$.
- $2^A = \{C \mid C \text{ ist Teilmenge von A}\}$.
- $A \cap B = \{c \mid c \in A \text{ und } c \in B\}$
- $A \cup B = \{c \mid c \in A \text{ oder } c \in B\}$. Achtung: Das Wort *oder* ist hier nicht als ausschließendes oder zu lesen!
- $\emptyset$ ist die Menge, welche keine Elemente enthält, $|\emptyset| = 0$.
- $A \setminus B = \{c \mid c \in A \text{ und } c \notin B\}$.

Aufgabe 1: Betrachten Sie die folgenden Mengen: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\}$ und $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ohne Rest durch 4 teilbar}\}$. Nehmen Sie an, dass $0 \in \mathbb{N}$ und, dass 0 gerade.

(a) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

(i) $A \subseteq C$ (ii) $C \subseteq A$ (iii) $\emptyset \in A$ (iv) $\emptyset \subseteq A$ (v) $B \subseteq C$ (vi) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (vii) $\emptyset \in \emptyset$

(b) Geben Sie die folgenden Mengen an:

(i) $A \cap C$ (ii) $B \cap C$ (iii) $A \cap B \cap C$ (iv) $A \cup C$ (v) $A \cup B$ (vi) $C \setminus A$ (vii) $A \setminus B$.

(c) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

(i) $\{a, b, c, d, e, f\} = \{c, a, f, d, e, b\}$ (ii)$|\emptyset| = 0$ (iii) $|\{\emptyset\}| = 0$.

(d) Seien nun M_1, M_2, M_3 beliebige Mengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_3 \Longrightarrow M_1 \subseteq M_3$

(ii) $M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$.

(iii) $M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$.

(iv) Sei $M_2 \subseteq M_1$. Dann: $(M_1 \setminus M_2) \cup M_2 = M_1$

(e) Geben Sie die folgenden Mengen an:

(i) $M_1 \setminus M_1$ (ii) $M_1 \cup M_1$ (iii) $M_1 \cup \emptyset$ (iv) $M_1 \setminus \emptyset$ (v) $M_1 \cap \emptyset$ (vi) $\emptyset \cup \emptyset$.

Aufgabe 2:

(a) Drücken Sie die folgenden Sätze in Mengenschreibweise aus. Verwenden Sie dazu die oben genannten Quantoren und die bisher gelernten Begriffen aus der Mengenlehre.

(i) Ich werde diese Woche an mindestens einem Tag an die Uni fahren.

(ii) Ich werde diese Woche alle Übungsaufgaben auf dem 1. Übungsblatt in Theo 1 bearbeiten.

(iii) Es wird diese Woche einen Tag geben, an welchem ich nichts für die Uni machen werde.

(iv) Es wird diese Woche genau einen Tag geben, an welchem ich nicht meinen Übungsraum suchen muss.

(v) Ich kenne nicht alle meiner Kommilitonen.

(b) Nun etwas mathematischer. Seien A, B und C die Mengen aus Aufgabe 1. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

(i) $\exists\, n \in \mathbb{N} : n \in \emptyset$ (ii) $\exists\, n \in \mathbb{N} : 3 \cdot n \in A$. (iii) $\exists!\, n \in \mathbb{N} : 3 \cdot n \in A$

(iv) $\forall n \in C : n$ ist gerade (v) $\neg\,(\forall n \in A : n$ ist durch 4 teilbar.).

(c) Drücken Sie die folgenden Aussagen in Mengenschreibweise aus. Verwenden Sie dazu die oben genannten Quantoren und die bisher gelernten Begriffen aus der Mengenlehre.

(i) Für jede natürliche Zahl n gibt es eine natürliche Zahl m so, dass $m > n$.

(ii) Es existiert eine natürliche Zahl n so, dass es keine natürliche Zahl m gibt so, dass $m < n$.

(iii) Es existiert genau eine gerade Zahl, welche eine Primzahl ist.

(iv) Es existiert keine ungerade Zahl, welche durch zwei teilbar ist.