Übungsblatt 1

Punkte: 50

Hertrampf, Mattes
FMI/TI, FMI/TI
Universität Stuttgart

Wir nehmen ab jetzt immer an, dass $0 \in \mathbb{N}$ sofern nichts anderes erwähnt wurde.

Aufgabe 1: Sprachen und Wörter **[22]**

Sei Σ ein endliches Alphabet und $n \in \mathbb{N}$. Ein Wort w der Länge n ist eine endliche Folge $w = a_1 \dots a_n$ von Buchstaben $a_i \in \Sigma$, $1 \leq i \leq n$. Wir bezeichnen mit Σ^n die Menge aller Wörter über dem Alphabet Σ der Länge n und mit $\Sigma^{\leq n}$ die Menge aller Wörter über dem Alphabet Σ der Länge $\leq n$. Die Menge alle Wörter endlicher Länge über Σ bezeichnen wir mit Σ^*. Es ist also $\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n$.

(a) Geben Sie die Mengen Σ^n und $\Sigma^{\leq n}$ in Mengenschreibweise an. Verwenden Sie dabei so wenig natürliche Sprache wie möglich.

(b) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei $m \leq n$. Dann ist $\Sigma^{\leq n} \cap \Sigma^{\leq m} = \Sigma^{\leq m}$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : |\Sigma^n| < \infty$. *Hinweis:* Verwenden Sie das Prinzip der vollständigen Induktion.

(iii) $\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^{\leq n}$.

(c) Das Produkt zweier Sprachen $K, L \subseteq \Sigma^*$ ist wie folgt definiert:

$$KL = \{uv \mid u \in K, v \in L\}.$$

Außerdem ist $L^0 = \{\varepsilon\}$ und rekursiv $L^{n+1} = L^n L$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Schließlich ist $L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$.

Welche der folgenden Aussagen gelten für beliebige Sprachen $K, L \subseteq \Sigma^*$ und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.

(i) $(LK)^2 = L^2 K^2$

(ii) $(LK)^* = L^* K^*$

Geben Sie eine Sprache K an so, dass für alle Sprachen L gilt: $L \subseteq KL$.

(d) Sei $w \in \Sigma^*$. Dann definieren wir die Sprache wL als die Sprache $\{w\}L$.

Sei $a \in \Sigma$. Welche der folgenden Aussagen gelten für eine beliebige Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.

(i) $aL = La$

(ii) $\Sigma^* a \Sigma^* = \Sigma^*$

(iii) Falls $|L| < \infty$ dann gilt, dass $|aL| = |La|$.

Punkteverteilung: 1P+7P+8P+6P=22P

Aufgabe 2: Grammatiken **[8]**

(a) Bei welchen der folgenden Objekten handelt es sich um eine Grammatik? Welche der folgenden Objekte sind keine Grammatiken? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort! Wenn es sich um eine Grammatik handelt, ordnen Sie diese in der Chomsky-Hierarchie ein.

(i) $(V_1, \{a, b\}, P_1, S)$ mit $V_1 = \{S, A_i \mid i \in \mathbb{N}, A_i \neq A_j$ für $i \neq j.\ \}$

(ii) $(V_2, \{a, b\}, P_2, S)$ mit $V_2 = \{S, A\}$, $P_2 = \{S \to A,\ A \to a,\ \epsilon \to b\}$

(iii) $(V_3, \{a, b\}, P_3, S)$ mit $V_3 = \{S, B, C\}$ und

$$P_3 = \{S \to B, S \to A, S \to C, C \to a, B \to b, A \to c\}.$$

(iv) $(V_4, \{a, b\}, P_4, S)$ mit $V_4 = \{S, A, B\}$ and

$$P_4 = \{S \to A, A \to BB, A \to a, B \to b\}$$

(b) Betrachten Sie im Folgenden die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$P = \{S \to AS, S \to C, A \to a, A \to b, C \to c\}.$$

(i) Welche Sprache wird von dieser Grammatik erzeugt?

(ii) Wo ordnen Sie die Sprache in der Chomsky-Hierarchie ein?

Punkteverteilung: 5P+3P=8P

Aufgabe 3: Sprachen und ihre Grammatiken **[12]**

Sei Σ ein endliches Alphabet und seien $a, b \in \Sigma$. Gegeben sei die Sprache $L_2 \subseteq \Sigma^*$ wie folgt:

$$L_2 = \{a^{2n} b^{2m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

(a) Geben Sie für die Sprache L_2 eine Grammatik vom Typ 2 an. Beweisen Sie, dass Ihre Grammatik tatsächlich die Sprache L_2 erzeugt.

(b) Erzeugt Ihre Grammatik auch die Sprache $L_1 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Geben Sie für die Sprache $L_k = \{a^{k \cdot n} b^{k \cdot m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ eine Grammatik an, welche diese Sprache erzeugt. Wo würden Sie Ihre Grammatik in der Chomsky-Hierarchie einordnen?

(d) Sei L eine Typ-2 Sprache. Gibt es dann eine Typ-1 Grammatik, welche die Sprache L erzeugt? Begründen Sie Ihre Antwort!

(e) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

Sei L eine Typ-0 Sprache. Dann gilt: $|L| = \infty$.

Punktverteilung: 5P+1P+3P+1P+2P=12P

Aufgabe 4: Zur Existenz überabzählbar vieler Sprachen **[8]**

Seien A und B Mengen. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt *surjektiv*, wenn es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt. Außerdem heißt $f : A \to B$ *injektiv*, wenn $f(a) = f(a') \implies a = a'$ für alle $a, a' \in A$ gilt. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt *bijektiv*, falls sie injektiv UND surjektiv ist. Das bedeutet, für jedes $b \in B$ existiert GENAU EIN $a \in A$ so, dass $f(a) = b$. Die Abbildung f ordnet also JEDEM Element aus B GENAU EIN Element aus A zu.

Eine (endliche oder unendliche) Menge A heißt *abzählbar*, falls es eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ gibt so, dass eine bijektive Abbildung $f : M \to A$ existiert. Eine (unendliche) Menge A heißt *abzählbar unendlich*, falls eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ existiert, falls also jedem Element aus A genau ein Element aus $\mathbb{N}$ zugeordnet werden kann. Eine unendliche Menge B heißt *überabzählbar*, falls KEINE bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to B$ existiert.

(a) Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeigen Sie: Σ^* ist abzählbar unendlich.

Hinweis: Sortieren Sie zunächst die Elemente in Σ. Verwenden Sie diese Sortierung und betrachten Sie die Länge von Wörtern, um Σ^* zu sortieren. Nutzen Sie diese Sortierung dann, um die Abbildung f zu definieren.

(b) Es gilt, dass die Potenzmenge einer abzählbar unendlichen Menge immer überzählbar ist. Schließen Sie daraus und aus (a), dass es überabzählbar viele Sprachen über dem endlichen Alphabet Σ gibt.

Punkteverteilung: 6P+2P