

Wir nehmen ab jetzt immer an, dass  $0 \in \mathbb{N}$  sofern nichts anderes erwähnt wurde.

**Abgabe: Freitag, 27.11. um 12 Uhr über ILIAS.**

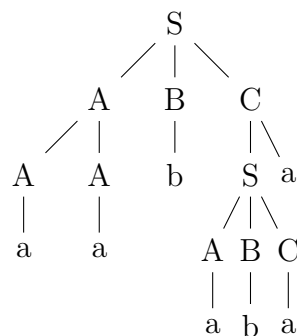
**Aufgabe 1: Zum Wortproblem.** [14]

Nehmen Sie an, Ihr Dozent hat am Vormittag in der Vorlesung ein Wort  $w$  verwendet, welches Ihnen bisher noch nicht begegnet ist. Sie wollen nun herausfinden, ob dieses Wort zur deutschen Sprache gehört. Dies ist möglich, da  $w$  nur aus Buchstaben besteht, welche auch in der deutschen Sprache vorkommen. Leider ist das Internet mal wieder ausgefallen, und Sie haben nur einen Duden zur Verfügung. (Sie dürfen annehmen, dass dieser exakt alle deutschen Wörter enthält.) Ihr kleiner Bruder schlägt vor, einfach alle Wörter der Reihe nach anzuschauen.

- (a) Geben Sie den Algorithmus Ihres Bruders mit Hilfe von mathematischen Symbolen und Schreibweisen in Pseudocode an. Entscheidet dieser Algorithmus Ihr Wortproblem?
- (b) Würden Sie in der Realität ebenso vorgehen, oder kennen Sie einen (in der Realität) effizienteren Algorithmus? Falls Ja, so geben Sie diesen an. Sie dürfen diesen in Worten beschreiben, achten Sie aber dennoch auf eine saubere und logisch nachvollziehbare Reihenfolge der einzelnen Schritte. Achten Sie darauf, keine Schritte auszulassen!
- (c) Sei  $L$  eine weitere Sprache über dem Alphabet  $\Sigma = \{A, B, \dots, X, Y, Z\}$ . Sei außerdem  $|L| = \infty$  und  $L \neq \Sigma^*$ .
  - (i) Nehmen Sie an, Sie könnten sich eine Sortierung von  $L$  wünschen. Sie dürfen außerdem annehmen, dass sie die Elemente von  $L$  in einer unendlichen Liste speichern können. Welche Sortierung würden Sie sich wünschen, sodass Sie einen Algorithmus angeben können, welcher Ihnen in endlicher Zeit sagt, ob ein Wort  $w \in \Sigma^*$  in Ihrer Sprache  $L$  ist?
  - (ii) Geben Sie einen Entscheidungsalgorithmus für das Wortproblem von  $L$  an. Sie dürfen dabei Ihre Sortierung aus (i) verwenden.
  - (iii) Nehmen Sie den Algorithmus aus (a) (und passen Sie diesen entsprechend für  $L$  an). Entscheidet dieser das Wortproblem von  $L$ ?

**Aufgabe 2: Zu Sprachen und Syntax-Bäumen.** [8]

Gegeben sei der folgende Syntaxbaum



- (a) (i) Geben Sie die Menge aller Ableitungsregeln an, welche Sie aus dem Baum erkennen können.
- (ii) Geben Sie eine Grammatik mit genau den Ableitungsregeln aus (i) an. Welche Sprache wird von Ihrer Grammatik erzeugt?
- (b) Die Tiefe eines Knotens  $K$  in einem Syntaxbaum definieren wir als die Anzahl an Kanten, über welche man laufen muss um vom Startknoten zum Knoten  $K$  zu kommen. Als die Tiefe eines Syntaxbaumes definieren wir die maximale Tiefe eines Blattes.
- Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine Typ-2 Grammatik und sei  $L = L(G)$ .
- (i) Sei  $w \in L(G)$  mit  $|w| = n$ . Zeigen oder widerlegen Sie: Der zu einer Ableitung von  $w$  gehörige Syntaxbaum hat Tiefe mindestens  $n$ .
- (ii) Geben Sie eine Grammatik  $G$  mit folgender Eigenschaft an: Jeder Syntaxbaum zu einer Ableitung mit Regeln von  $G$  hat maximal die Tiefe 2.
- (iii) Geben Sie eine Grammatik  $G$  mit folgender Eigenschaft an: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  existiert ein Syntaxbaum der Tiefe größer oder gleich  $n$  welcher zu einer Ableitung mit Regeln von  $G$  gehört.

*Punkteverteilung:* (a): 4P, (b): 4P

### Aufgabe 3: Deterministische endliche Automaten.

[20]

- (a) (i) Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$  ein DEA. Nehmen Sie an, dass  $\varepsilon \notin T(M)$ . Was können Sie dann über  $z_0$  und  $E$  sagen?
- (ii) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort:

Sei  $L$  eine von einem DEA erkannte Sprache. Dann existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  so, dass alle DEAs  $M$  mit  $T(M) = L$  höchstens  $n$  Zustände haben.

- (b) Sei die Sprache  $L$  gegeben durch

$$L = \{a^{3k+1}, b^{2\ell+1} \mid k, \ell \in \mathbb{N}\}.$$

Geben Sie einen DEA an, welcher die Sprache  $L$  erkennt. Geben Sie diesen sowohl in graphischer Darstellung als auch in Tupelschreibweise an.

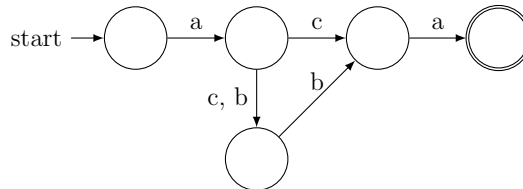
- (c) Sei  $\Lambda = \{a^n, b^n, \varepsilon \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ .
- (i) Zeigen Sie: Es existiert kein DEA  $M$  mit nur einem Endzustand, für den  $T(M) = \Lambda$  gilt.
- (ii) Existiert ein DEA  $M$  mit  $T(M) = \Lambda$ ? Falls ja, geben Sie diesen an, falls nein, begründen Sie Ihre Antwort.
- (d) Betrachten Sie die Sprache  $K = \{(abcdef)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .
- Zeigen Sie: Ein DEA  $M$ , welcher die Sprache  $K$  erkennt, hat mindestens 6 Zustände.

*Punkteverteilung:* (a): 4P, (b): 6P, (c): 4P, (d): 5P

**Aufgabe 4: Nichtdeterministische endliche Automaten.**

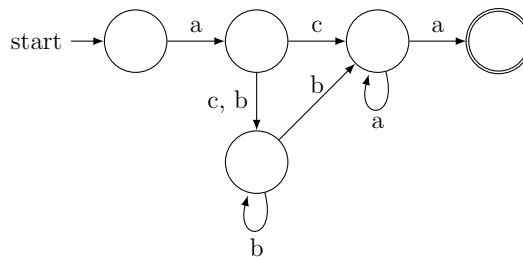
[8]

(a) Betrachten Sie den folgenden NEA.



- (i) Geben Sie die von diesem NEA akzeptierte Sprache an.
- (ii) Geben Sie einen DEA mit genau einem Endzustand an, welcher die selbe Sprache akzeptiert wie der NEA aus (i).

(b) Geben Sie nun die von dem folgenden NEA akzeptierte Sprache an.



- (c) Wie viele Zustände muss ein NEA, welcher kein DEA ist, mindestens haben? Begründen Sie Ihre Antwort!
- (d) Geben Sie für die Sprache  $\Lambda$  aus Aufgabe 3c) einen NEA mit nur einem Endzustand an.

*Punkteverteilung:* (a): 3P, (b): 2P, (c): 1P, (d): 2P