Übungsblatt 3

Punkte: 50

Hertrampf, Mattes
FMI/TI, FMI/TI
Universität Stuttgart

Wir nehmen ab jetzt immer an, dass $0 \in \mathbb{N}$ sofern nichts anderes erwähnt wurde.

Abgabe: Freitag, 11.12. um 12 Uhr (am Mittag)

Aufgabe 1: Zur Existenz nicht-regulärer Sprachen. [17]

Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $L^{(k)} = \{a^0b^0, a^1b^1, \ldots, a^kb^k\}$.

(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck für die Sprache $L^{(k)}$ an.

(b) Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DEA mit der Eigenschaft, dass $T(M) = L^{(k)}$.

  (i) Zeigen Sie: Es existieren Zustände $q_1, q_2, \ldots, q_k$ aus Z, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:
  - $z_0 \neq q_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ und $q_i \neq q_j$ für alle $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$
  - $\delta(z_0, a) = q_1$ und $\delta(q_i, a) = q_{i+1}$ für alle $1 \leq i \leq k-1$.

  (ii) Folgern Sie nun, dass M mindestens $2k+1$ Zustände besitzt.

(c) Geben Sie einen DEA M in Tupelschreibweise an, welcher die folgenden Eigenschaften besitzt: M hat genau $2k+2$ Zustände und $T(M) = L^{(k)}$.

(d) Betrachten Sie nun die Sprache $L = \{a^nb^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie nun, dass es keinen DEA M gibt, welcher die Sprache L akzeptiert, OHNE das Pumping-Lemma zu verwenden. Gehen Sie dabei ähnlich wie in Aufgabe (b) (i) vor.

(e) Folgern Sie aus Teil (d), dass die Sprache L nicht vom Typ 3 sein kann.

Punkteverteilung: (a): 2P (b): 7P (c): 3P (d): 3P (e): 2P

Aufgabe 2: NEAs und der Satz von Rabin und Scott [14]

(a) Betrachten Sie die folgende Sprache

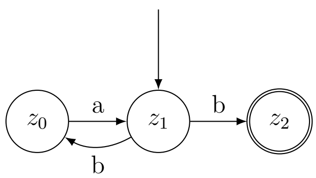
$$L = \{b^m \mid m \geq 2\} \cup \{c^\alpha b^m c^\beta \mid m \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \{0,1\}, \alpha + \beta = 1\} \cup \{cb^mc \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

  (i) Geben Sie einen regulären Ausdruck für die Sprache L an.

  (ii) Geben Sie einen NEA M in graphischer Darstellung an, welcher die folgenden Eigenschaften besitzt: M hat genau 3 Zustände und $T(M) = L$.

  (iii) Zeigen Sie: Es existiert ein DEA M' mit maximal 8 Zuständen, welcher die Sprache L akzeptiert.

(b) Betrachten Sie nun folgenden NEA M:



  (i) Geben Sie $T(M)$ an.

  (ii) Geben Sie einen DEA M' an welcher die Sprache $T(M)$ akzeptiert. Gehen Sie dabei wie im Beweis des Satzes von Rabin und Scott vor.

Punkteverteilung: (a) 7P, (b): 7P

Aufgabe 3: Das Pumping-Lemma. **[11]**

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $x \in \Sigma^*$. Dann bezeichnen wir mit $|x|_a$ die Anzahl der a's in x und mit $|x|_b$ die Anzahl der b's in x.

Ein kleines Beispiel: Sei $x = abbbaab$. Dann ist $|x|_a = 3$ und $|x|_b = 4$.

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Dann schreiben wir $n \mid m$ falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $m = k \cdot n$. Wir sagen: n teilt m.

(a) Betrachten Sie die Sprache $L_1 = \{x \in \{a, b\}^* : \ |x|_a \mid |x|_b\}$.
  (i) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$ und $n > m$. Zeigen Sie: $n \nmid m$.
  (ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache L_1 nicht regulär ist.

(b) Betrachten Sie die Sprache $L_2 = \{x \in \{a, b\}^* \mid |x|_a$ ist eine Zweierpotenz.$\}$
  (i) Zeigen Sie: $2^n + n < 2^{n+1}$ für $n \geq 1$.
  (ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache L_2 nicht regulär ist.

Punkteverteilung: (a): 5P (b): 6P

Aufgabe 4: Äquivalenzrelationen und der Satz von Myhill und Nerode. **[8]**

Sei A eine beliebige Menge. Dann definieren wir $A \times A = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in A\}$. Sei $B \subseteq A \times A$. Dann können wir auf der Menge A die folgende Relation definieren:

$$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in B.$$

Ein kleines Beispiel: Sei Σ ein endliches Alphabet und

$$B \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*, \ B = \{(v, w) \mid |v| = |w|\}$$

Es ist also vRw genau dann, wenn $|v| = |w|$.

Eine solche Relation R nennen wir eine Äquivalenzrelation, falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- *Reflexivität:* Für alle $x \in A$ gilt: xRx.
- *Symmetrie:* Für alle $x, y \in A$ gilt: $xRy \Rightarrow yRx$.
- *Transitivität:* Für alle $x, y, z \in A$ gilt: xRy und $yRz \Rightarrow xRz$.

Sei $x \in A$ und sei R eine Äquivalenzrelation auf A. Die Menge $[x] = \{y \in A \mid xRy\}$ nennen wir die Äquivalenzklasse von x. Es gilt:

- $[x] = [y]$ genau dann, wenn xRy
- $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ genau dann, wenn $[x] = [y]$.

(a) Sei Σ ein endliches Alphabet und sei die Relation R auf Σ^* wie folgt definiert:

$$vRw \iff (\exists a \in \Sigma, \exists u_1, u_2 \in \Sigma^* : v = au_1 \text{ und } w = au_2) \ \vee \ (v = w = \epsilon)$$

(i) Zeigen Sie: Die Relation R ist eine Äquivalenzrelation.

(ii) Zeigen Sie: Die Menge $\{[x] \mid x \in \Sigma^*\}$ ist endlich.

(b) Sei $|\Sigma| \geq 2$ und sei $a \in \Sigma$. Zeigen Sie: Die Sprache $L = a\Sigma^*$ ist regulär. Verwenden Sie hierzu den Satz von Myhill und Nerode.

Punkteverteilung: (a): 5P, (b): 3P