Übungsblatt 4

Punkte: 50

Hertrampf, Mattes
FMI/TI, FMI/TI
Universität Stuttgart

Abgabe: Freitag, 08.01.2021 um 12 Uhr (Mittag)

Wir nehmen ab jetzt immer an, dass $0 \in \mathbb{N}$ sofern nichts anderes erwähnt wurde.

Zur Erinnerung: Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt gerade, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $n = 2 \cdot k$. Beachten Sie: nach dieser Definition ist 0 eine gerade Zahl. Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt ungerade, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $n = 2 \cdot k + 1$.

Aufgabe 1: Zur Konstruktion des Minimalautomaten. [17]

Betrachten Sie die folgende Sprache:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ ist gerade und } |w|_b \text{ ist ungerade}\}.$$

(a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Seien n und m gerade. Dann ist auch $n + m$ gerade.

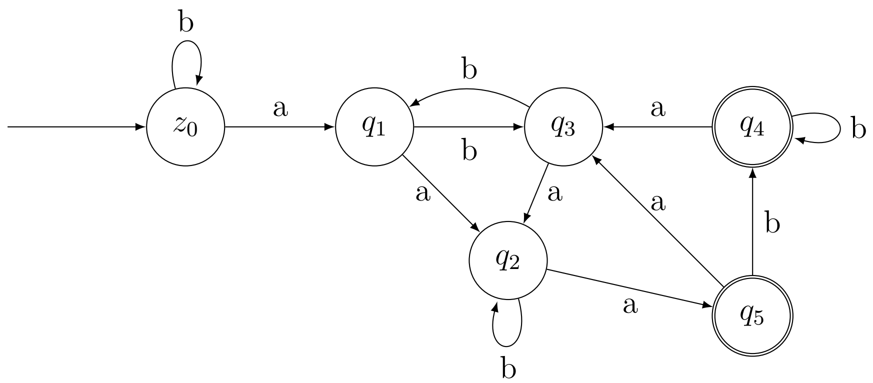
(ii) Seien n und m ungerade. Dann ist $n + m$ gerade.

(iii) Seien n gerade und m ungerade. Dann ist auch $n + m$ ungerade.

(b) Geben Sie die Myhill-Nerode Klassen von L an. Beweisen Sie, dass Ihre Klassen korrekt sind. Zeigen Sie dann unter Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode, dass L eine reguläre Sprache ist.

(c) Geben Sie den minimalen DEA an, welcher die Sprache L erkennt. Geben Sie Ihre Zwischenschritte und deren Ergebnisse an.

(d) Betrachten Sie den folgenden DEA M:



(i) Konstruieren Sie einen minimalen DEA M_0, welcher die selbe Sprache erkennt. Geben Sie dabei Ihre Zwischenschritte und deren Ergebnisse an.

(ii) Wie viele Myhill-Nerode Klassen hat die Sprache T(M)? Begründen Sie Ihre Antwort, ohne die Klassen anzugeben.

Punkteverteilung: (a): 2P, (b): 5P (c): 3P (d): 7P

Aufgabe 2: Monoide **[10]**

Zur Erinnerung: Ein Monoid ist eine Menge M mit einer binären Verknüpfung

$$\circ : M \times M \to M,\ (m, n) \mapsto m \circ n$$

welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- Die Verknüpfung ist assoziativ, d.h. für alle $n, m, k \in M$ gilt:

$$(n \circ m) \circ k = n \circ (m \circ k)$$

- Es gibt ein neutrales Element $e \in M$ mit der Eigenschaft, dass für alle $m \in M$ gilt:

$$e \circ m = m = m \circ e.$$

Wir schreiben: $(M, \circ, e)$ für das Monoid M mit der Verknüpfung $\circ$ und dem neutralen Element e. Beachten Sie, dass $\circ$ und e lediglich Namen sind. Verknüpfungen heißen häufig auch z.B. " $\cdot$ " oder " $+$ ", das neutrale Element wird häufig auch mit 1 oder 0 bezeichnet (je nach dem, ob die Verknüpfung multiplikativ oder additiv geschrieben wird).

(a) (i) Zeigen Sie: Die Menge $\mathbb{N}_{\geq 100} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 100\} \cup \{0\}$ mit der Verknüpfung " $+$ " ist ein Monoid.

(ii) Ist auch die Menge $\mathbb{N}_P = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist prim}\}$ mit der Verknüpfung "$+$"ein Monoid? Begründen Sie Ihre Antwort!

(iii) Sei Σ ein endliches Alphabet und sei $L \subseteq \Sigma^*$, $|L| < \infty$ und $L \neq \{\epsilon\}$. Zeigen Sie: L kann mit der Kontakenation als Verknüpfung und dem leeren Wort als neutralem Element KEIN Monoid bilden.

Sei nun R eine Kongruenz auf dem Monoid M. Für ein $m \in M$ bezeichnen wir mit $[m]$ die Äquivalenzklasse von m bezüglich der Relation R. Mit M/R bezeichnen wir die Menge dieser Äquivalenzklassen, also

$$M/R = \{[m] \mid m \in M\}.$$

Auf dieser Menge M/R definieren wir nun eine binäre Verknüpfung $\bullet$ wie folgt:

$$\bullet : M/R \times M/R \to M/R,\ [m] \bullet [n] \mapsto [m \circ n].$$

(b) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\forall m, m', n, n' \in M : [m] = [m']$ und $[n] = [n'] \Rightarrow [m \circ n] = [m' \circ n']$,

d.h. die Verknüpfung $\bullet$ hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten der Äquivalenzklassen ab, also ist sie wohldefiniert.

(ii) Die Menge M/R mit der Verknüpfung $\bullet$ ist ein Monoid.

Punkteverteilung: (a): 4P, (b): 6P

Aufgabe 3: Das kleinste Monoid. **[15]**

Sei nun $(M, \circ, e)$ ein Monoid. Ein *Untermonoid* von M ist eine Teilmenge $U \subseteq M$ welche die folgenden Eigenschaften erfüllt: Für alle $u_1, u_2 \in U$ gilt, dass $u_1 \circ u_2 \in U$. Wir sagen auch, U ist unter der Verknüpfung $\circ$ abgeschlossen. Außerdem muss gelten, dass $e \in U$.

(a) Seien $(M_1, \circ_1, e_1)$ und $(M_2, \circ_2, e_2)$ Monoide und $\phi : M_1 \to M_2$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie: $\phi(M_1) = \{\phi(m) \mid m \in M_1\}$ ist ein Untermonoid von M_2.

(b) Sei Σ ein endliches Alphabet und sei $L \subseteq \Sigma^*$. Sei $M = (M, \circ, e)$ ein Monoid.

(i) Sei $\phi : \Sigma^* \to M$ ein Homomorphismus und sei die Abbildung ψ wie folgt definiert:

$$\psi : \phi(\Sigma^*) \to Synt(L),\ \phi(u) \to [u]$$

Zeigen Sie: Die Abbildung ψ ist wohldefiniert genau dann, wenn $\phi^{-1}(\phi(L)) = L$.

Hinweis: Um zu zeigen, dass ϕ wohldefiniert ist müssen Sie Folgendes zeigen:

$$\forall u, v \in \Sigma^* : \phi(u) = \phi(v) \Rightarrow [u] = [v].$$

(ii) Nehmen Sie nun an, dass M die Sprache L erkennt. Zeigen Sie: Es existieren ein Untermonoid U von M und ein surjektiver Homomorphismus

$$\alpha : U \to Synt(L).$$

Hinweis: Wenn Sie einen Homomorphismus definieren müssen Sie immer zeigen, dass dieser auch wohldefiniert ist. Dies bedeutet insbesondere, wenn Sie ein Element auf verschiedene Weisen darstellen können, dann darf die Definition Ihres Homomorphismus nicht von dieser Darstellung abhängen.

Es gilt außerdem Folgendes: Wenn ein Untermonoid U von M und ein surjektiver Homomorphismus $\alpha : U \to Synt(L)$ existieren, dann erkennt M die Sprache L. Dies müssen Sie nicht beweisen.

(iii) Sei nun $|M| < |Synt(L)|$. Folgern Sie: M ist kein Monoid, welches L erkennt.

Punkteverteilung: (a): 2P, (b): 13P

Aufgabe 4: Chomsky-Normalform **[8]**

(a) Sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ wie folgt gegeben: $V = \{S, A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ mit P gegeben durch:

$$\begin{aligned} S &\to AB \mid C \mid Ca & A &\to C \mid bCa \mid CDb \mid a \\ B &\to aSCc \mid BAC \mid b & C &\to S \mid D \mid DSa \mid c \\ D &\to S \mid Ca \mid aBa \mid a \end{aligned}$$

Geben Sie eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform an mit der Eigenschaft, dass $L(G) = L(G')$. Geben Sie die einzelnen Schritte Ihrer Umformung an.

(b) Sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ wie folgt gegeben: $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ mit P gegeben durch:

$$\begin{aligned} S &\to A \mid AB \mid ABC & A &\to B \mid BC \mid a \\ B &\to C \mid SAc & C &\to S \mid b \mid ABa \end{aligned}$$

Geben Sie eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform an mit der Eigenschaft, dass $L(G) = L(G')$. Geben Sie die einzelnen Schritte Ihrer Umformung an.

Punkteverteilung: (a): 5P, (b): 3P