

Abgabe: Freitag, 29.01. 12 Uhr (mittag)

Aufgabe 1: Abschlusseigenschaften [6]

- (a) Geben Sie Sprachen $L_i, i = 1, 2, \dots$ in CFL an mit $L_i \neq L_j$ für $i \neq j$, so dass die Sprache $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$ nicht in CFL ist.
- (b) Geben Sie Sprachen L_1, L_2 in $\text{CFL} \setminus \text{REG}$ an, so dass $L_1 \cap L_2$ ebenfalls in CFL ist.
- (c) Ist die Sprache $\{a^i b^j \mid i, j \geq 0, i \neq j\}$ in DCFL? Beweisen Sie Ihre Antwort!
- (d) Zeigen oder widerlegen Sie: $L \notin \text{DCFL} \Rightarrow \bar{L} \notin \text{DCFL}$

Punkteverteilung: (a): 2P, (b): 2P, (c): 1P, (d): 1P

Aufgabe 2: CYK-Algorithmus [14]

- (a) Sei $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ eine Typ-2 Grammatik in CNF mit den folgenden Produktionsregeln:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid BB \\ A &\rightarrow AC \mid BC \mid a \\ B &\rightarrow b \mid a \mid CB \\ C &\rightarrow b \mid c \mid CC \end{aligned}$$

Ist $w = aacbcc \in L(G)$? Verwenden Sie den CYK-Algorithmus. Geben Sie die Mengen $T_{i,j}$ in Form einer Tabelle an (Bezeichnungen wie in der Vorlesung).

- (b) Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik. Die folgende Tabelle wurde bei der Anwendung des CYK-Algorithmus für das Wort bbab erstellt.

	b	b	a	b
1	B	B	A	B
2	S	-	S	×
3	A	B	×	×
4	S	×	×	×

- (i) Ist $bbab \in L(G)$?
- (ii) Welche Produktionsregeln müssen in G in jedem Fall existieren? Welche existieren in jedem Fall nicht?
Sie dürfen davon ausgehen, dass die Grammatik G in CNF gegeben ist.
- (iii) Geben Sie einen Syntaxbaum für das Wort $bbab$ mit Ableitungsregeln aus P an.

Punkteverteilung: (a): 6P, (b): 8P

Aufgabe 3: Akzeptierung durch Endzustände

[14]

In der Vorlesung wurden PDA's als 6-Tupel $(Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ eingeführt, mit der Akzeptierung durch leeren Keller. Wir können ein solches 6-Tupel nun auch als 7-Tupel betrachten, bei welchem die letzte Komponente die leere Menge ist. Diese letzte Komponente bezeichnen wir im Folgenden als die Menge der Endzustände und definieren einen PDA, welcher durch Erreichen eines Endzustandes akzeptiert, wie folgt:

Wir setzen nun $\tilde{M} = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, F)$, wobei mit $F \subseteq Z$ die Menge der Endzustände bezeichnet wird. Der Automat \tilde{M} arbeitet auf $Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ genau gleich wie M . Die von \tilde{M} durch Erreichen eines Endzustandes akzeptierte Sprache ist nun wie folgt definiert:

$$N(\tilde{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists z \in F, V \in \Gamma^* \text{ mit } (z_0, w, \#) \vdash_{\tilde{M}}^* (z, \varepsilon, V)\}$$

Wir zeigen in dieser Aufgabe, dass die Menge der durch einen PDA mittels leerem Keller akzeptierten Sprachen genau der Menge der durch einen PDA mittels Erreichen eines Endzustandes akzeptierten Sprachen entspricht.

- (a) Sei $M_1 = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, F)$ ein PDA mit $F \neq \emptyset$, welcher durch Erreichen eines Endzustandes akzeptiert. Betrachten Sie den folgenden PDA

$$M_2 = (Z \cup \{z'_0, z_e\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\Delta\}, \delta', z'_0, \Delta, \emptyset)$$

mit $\Delta \notin \Gamma$ und

- (1) $\delta'(z'_0, \varepsilon, \Delta) = \{(z_0, \#\Delta)\}$
- (2) $\forall z \in Z, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, \forall A \in \Gamma: \delta(z, a, A) = \delta'(z, a, A)$
- (3) $\forall z \in F, A \in \Gamma \cup \{\Delta\}: (z_e, \varepsilon) \in \delta'(z, \varepsilon, A)$
- (4) $\forall A \in \Gamma \cup \{\Delta\}: (z_e, \varepsilon) \in \delta'(z_e, \varepsilon, A)$

Zeigen Sie: $N(M_1) = N(M_2)$.

- (b) Sei $M_1 = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, \emptyset)$ ein PDA mit Akzeptierung durch leeren Keller. Betrachten Sie den PDA

$$M_2 = (Z \cup \{z'_0, z_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\Delta\}, \delta', z'_0, \Delta, \{z_f\})$$

mit $\Delta \notin \Gamma$ und

- (1) $\delta'(z'_0, \varepsilon, \Delta) = \{(z_0, \#\Delta)\}$
- (2) $\forall z \in Z, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, \forall A \in \Gamma: \delta'(z, a, A) = \delta(z, a, A)$.
- (3) $\forall z \in Z: (z_f, \varepsilon) \in \delta'(z, \varepsilon, \Delta)$.

Dieser PDA akzeptiert durch Erreichen eines Endzustandes. Zeigen Sie: $N(M_1) = N(M_2)$.

Punkteverteilung: (a): 6P, (b): 6P plus 2P für eine saubere Darstellung der Beweise.

Aufgabe 4: Von PDA's und DPDA's akzeptierte Sprachen**[16]**

(a) Geben Sie für jede der folgenden Sprachen einen PDA an (mit Akzeptierung durch leeren Keller), der diese Sprache akzeptiert.

(i) $L_1 = \{a^i b^j \mid i > j\}$

(ii) $L_2 = \{a^n b^{3n} c \mid n \in \mathbb{N}\}$

(iii) $L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i + j = k\}$

(b) Geben Sie für jede der Sprachen aus Aufgabenteil (a) einen DPDA an, welcher die jeweilige Sprache akzeptiert.

Hinweis: Sie dürfen Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe (a) verwenden.

Punkteverteilung: (a): 9P, (b):7P