Graphen

Wir geben zunächst die allgemeinste Definition für den Begriff *Graph* an:

Definition: Ein Graph ist ein 4-Tupel (V, E, σ, τ), wobei V und E Mengen sind, und $\sigma : E \to V$ und $\tau : E \to V$ totale Abbildungen.

Im Rahmen dieser Vorlesung beschränken wir uns auf einfache ungerichtete Graphen, die wie folgt definiert werden können:

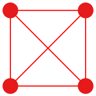
Definition: Ein einfacher ungerichteter Graph ist ein Paar (V, E), wobei V die Menge der Knoten und $E \subseteq \binom{V}{2}$ die Menge der Kanten ist.

Bitte schlagen Sie im Buch von Diekert et al. nach, um mehr über die verschiedenen Graphendefinitionen zu erfahren.

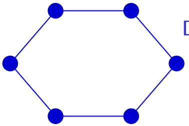
Graphische Darstellung von Graphen

Graphen können *graphisch dargestellt* werden, indem man die Elemente von V als Knoten und Elemente von E als Verbindungen der beiden zugehörigen Knoten zeichnet:

Dieser Graph heißt P_5. Die Verallgemeinerung auf P_n ist offensichtlich.



Das ist der K_4. Der K_n ist im allgemeinen der *vollständige* Graph mit n Knoten.



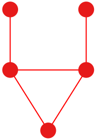
Dieser Graph heißt C_6.

Verallgemeinerung auf C_n naheliegend.

Als *Komplementgraph* zum Graph $G = (V, E)$ bezeichnen wir den Graph $G' = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$. Als Beispiel für diese Begriffsbildung konstruieren wir die Komplementgraphen für die obigen Graphen.

Der Stier und andere besondere Graphen

Der Stier ist der folgende Graph:



Die Besonderheit beim Stier:

Sein Komplementgraph ist isomorph zum ursprünglichen Graph.

Definition: Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ sind *isomorph*, falls es eine bijektive Abbildung $\varphi : V_1 \to V_2$ gibt, so dass für alle $u, v \in E_1$ gilt:

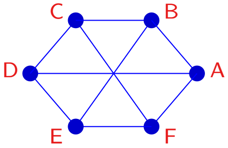
$$\{u, v\} \in E_1 \iff \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$$

Man sagt dann auch, die Graphen sind „bis auf Umbenennung“ gleich.

Bipartite Graphen

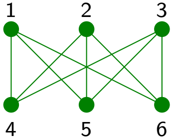
Wenn die Knotenmenge V des Graphen $G = (V, E)$ so in zwei Teile V_1 und V_2 aufgeteilt werden kann, dass für jede Kante $\{u, v\} \in E$ genau einer der beiden Knoten u, v in jeder der beiden Mengen V_1 und V_2 liegt, dann sprechen wir von einem *bipartiten Graph.*

Dieser Graph ist bipartit:



Die Abbildung φ mit $\varphi(A) = 1$, $\varphi(B) = 4$, $\varphi(C) = 2$, $\varphi(D) = 5$, $\varphi(E) = 3$, $\varphi(F) = 6$ ist eine bijektive Abbildung, die diesen Graph auf den offensichtlich bipartiten Graph $K_{3,3}$ (sh. rechts) abbildet.

$K_{3,3}$:



Inzidenz, Adjazenz, Knotengrad

Gemäß unserer Definition der (ungerichteten) Graphen ist eine Kante eine zweielementige Teilmenge von V. Daher kann man für gegebene Kante e und Knoten u die Frage „$u \in e$?“ stellen.
Wir sagen, u und e sind *inzident,* wenn $u \in e$ gilt.
Zwei Knoten u und v sind *adjazent,* wenn $\{u, v\} \in E$ gilt.

Der *Grad* des Knotens $u \in V$ ist die **Anzahl** der Kanten, die zu u inzident sind.

Im Graph C_n hat jeder Knoten den Grad 2.
Im Graph P_n haben zwei Knoten Grad 1, die übrigen Grad 2.
Im Graph K_n haben alle Knoten den Grad $n - 1$.
Im Graph $K_{3,3}$ hat jeder Knoten den Grad 3.
Im Stier hat ein Knoten Grad 2, je zwei Knoten haben Grad 1 und Grad 3.

Satz und Folgerung

Der folgende Satz heißt auch *Handschlaglemma:*

> Satz: Die Summe aller Knotengrade in einem ungerichteten Graph ist immer gerade.

Als Beweis genügt es offenbar festzustellen, dass jede Kante mit dem Wert 2 zu der genannten Summe beiträgt.

Der Satz hat eine interessante direkte Folgerung:

> In jedem endlichen Graph ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Wege und Kreise

Ein *Weg* in einem Graph $G = (V, E)$ ist eine Folge $(v_0, \ldots, v_n)$ von Knoten $v_i \in V$ mit der Eigenschaft, dass für alle i mit $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$\{v_{i-1}, v_i\} \in E$$

Ein anderer gebräuchlicher Ausdruck für „Weg“ in diesem Zusammenhang ist *Pfad*.

Die *Länge* des Weges $(v_0, \ldots, v_n)$ ist n. Man zählt also nicht die Knoten, sondern die durchlaufenen Kanten.

Als *einfachen Weg* bezeichnet man einen Weg, in dem alle Knoten verschieden sind.

Ein *Kreis* in einem Graph ist ein Weg $(v_0, \ldots, v_n)$ mit $v_0 = v_n$.

Als *einfachen Kreis* bezeichnet man einen Kreis $(v_0, \ldots, v_n)$ mit $v_0 = v_n$, bei dem die Knoten $v_0, \ldots, v_{n-1}$ alle verschieden sind.

Eulerweg und Eulerkreis

Ein Weg in einem Graph $G = (V, E)$ heißt *Eulerweg*, wenn auf ihm jede Kante des Graphen genau einmal durchlaufen wird.

Ein Eulerweg, der gleichzeitig ein Kreis ist, heißt *Eulerkreis*.

Es ist offensichtlich, dass ein P_n (für $n \geq 2$) immer einen Eulerweg, aber keinen Eulerkreis hat.

Ebenso klar ist, dass jeder C_n einen Eulerkreis hat.

Frage: Hat der K_n einen Eulerweg oder sogar einen Eulerkreis?

Durch einfaches Anschauen sieht man, dass der K_2 einen Eulerweg, aber keinen Eulerkreis hat. Der K_3 dagegen hat einen Eulerkreis.

Und wie sieht es mit K_4, K_5, K_6 aus?

Antwort: Der K_5 hat einen Eulerkreis, K_4 und K_6 haben nicht einmal einen Eulerweg.
Gleich werden wir ein Kriterium erarbeiten, um für jeden Graphen die Frage zu klären...

Der Satz

Bevor wir den Satz formulieren, müssen wir definieren, was ein zusammenhängender Graph ist:

Ein Graph ist *zusammenhängend,* wenn es zwischen je zwei Knoten immer einen Weg gibt, d.h. für $u, u' \in V$ existieren $v_0, \ldots, v_n$ so, dass $v_0 = u$, $v_n = u'$ und dass $(v_0, \ldots, v_n)$ ein Weg im Graph ist.

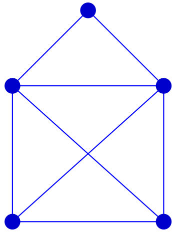
Damit gilt der folgende

Satz: Ein zusammenhängender endlicher Graph $G = (V, E)$ hat genau dann einen Eulerpfad, wenn die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad maximal 2 ist.
Ein Eulerkreis existiert genau dann, wenn alle Knoten geraden Grad haben.

Das Haus vom Nikolaus

Bevor wir den Beweis des Satzes angehen, wollen wir uns ein in Deutschland sehr bekanntes Beispiel betrachten:

Das Haus vom Nikolaus:



Das Haus hat acht Kanten. Der Satz

„Das ist das Haus vom Nikolaus.“

hat acht Silben. Nun soll man das Haus zeichnen, ohne dabei abzusetzen, wobei man den Satz (eine Silbe für jede Kante) laut aufsagt.

Nach dem eben formulierten Satz geht das, denn...

ein Knoten hat Grad 2, zwei haben Grad 4, aber die beiden Knoten unten haben Grad 3.

Beweis des Satzes

Zuerst prüfen wir, dass jeder Graph der einen Eulerkreis besitzt, zwingend gerade Knotengrade bei jedem Knoten haben muss: Beim Durchlaufen des Kreises wird jeder Knoten genauso oft angesteuert wie er verlassen wird. Jedesmal werden also zwei Kanten gebraucht. Jede Kante muss genau einmal durchlaufen werden. Also ist eine gerade Anzahl Kanten inzident zum Knoten.

Nun sei umgekehrt $G = (V, E)$ ein Graph, bei dem jeder Knoten geraden Grad hat. Wir müssen zeigen, dass ein Eulerkreis existiert.

Dazu wählen wir einen Weg mit maximaler Länge, der jede Kante höchstens einmal durchläuft. Der Weg sei $(v_0, \ldots, v_n)$.

Wir behaupten, dass $v_0 = v_n$ gilt.

Denn sonst gäbe es bei v_n noch eine ungenutzte Kante, durch die der Pfad verlängert werden könnte, im Widerspruch zur Maximalität!

Beweis (Fortsetzung)

Nun haben wir also einen Kreis, der jede Kante höchstens einmal durchläuft. Durchläuft er alle Kanten, sind wir fertig.

Sei nun $\{u, u'\}$ eine nicht durchlaufene Kante.

1. Fall: $u = v_i$ und $u' = v_j$ für zwei Knoten aus dem Kreis.
   Das kann nicht sein, weil dann leicht ein längerer Pfad konstruiert werden kann.

2. Fall: $u = x$ und $u' = v_i$, wobei v_i aus dem Kreis ist, x aber nicht.
   Das kann auch nicht sein – aus dem selben Grund wie im 1. Fall.

3. Fall: $u = x$ und $u' = y$, und x, y gehören beide nicht zum Kreis.
   Weil G zusammenhängend ist, können wir aber einen Weg von x zu einem v_i finden, dessen letzte Kante uns wieder zum 2. Fall führt - also auch unmöglich.

Also ist der gefundene Kreis schon ein Eulerkreis.

Die notwendige Modifikation für den Eulerweg, wenn zwei Knoten ungeraden Grades existieren, ist leicht und wird den Hörern und Hörerinnen zur Übung überlassen.

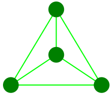
Planare Graphen

Bei der Betrachtung des $K_{3,3}$ ergab sich die Frage, ob man diesen Graph so in die Ebene einzeichnen kann, dass sich die Kanten nicht schneiden. Das motiviert folgende Definition:

Ein Graph heißt *planar*, wenn er sich so in die Ebene einzeichnen lässt, dass sich die Kanten nicht schneiden.

Zum Beispiel alle P_n und alle C_n sind planar. (Das sollte klar sein.)

Wie sieht es mit den vollständigen Graphen K_n aus?
Der K_2 ist der P_2, der K_3 ist der C_3, also sind beide planar!
Der K_4 ist auch planar:



Auch die Graphen $K_{2,n}$ sind für alle n planar.

Dagegen sind weder der K_5 noch der $K_{3,3}$ planar!
Beweis folgt gleich...

Eulerformel

Satz: In endlichen zusammenhängenden planaren Graphen mit $n \geq 1$ Knoten, m Kanten und f Facetten gilt

$$n - m + f = 2$$

(Als Facette bezeichnen wir hier eine zusammenhängende Fläche, die von Kanten berandet wird. Insbesondere ist *das Äußere* immer eine Facette!)

Beweis: Wir führen eine Induktion über die Anzahl der Knoten und der Kanten durch. Bei einem Knoten haben wir $n = 1$, $m = 0$ und $f = 1$.

Sei nun G ein Graph mit $n \geq 2$ Knoten, m Kanten und f Facetten. Die Induktionsvoraussetzung besagt, dass für alle zusammenhängenden planaren Graphen mit n Knoten und weniger als m Kanten oder mit weniger als n Knoten die Eulerformel erfüllt ist.

Induktionsschritt

1. Fall: Der Graph habe Kreise, dann hat er auch einen einfachen Kreis. Wir entfernen aus einem beliebigen einfachen Kreis eine beliebige Kante. Dann erhalten wir einen Graph mit n Knoten, $m-1$ Kanten und $f-1$ Facetten. Nach Ind.vorauss. gilt $n-(m-1)+(f-1)=2$. Aber dann folgt
$$n-m+f=n-(m-1)+(f-1)=2.$$
2. Fall: Nun habe G keine Kreise. Dann muss ein Knoten mit Grad 1 existieren. Wir entfernen diesen und seine einzige Kante. Dann bleibt der Graph zusammenhängend und planar, er hat nur noch $n-1$ Knoten und $m-1$ Kanten, aber die Anzahl der Facetten ändert sich nicht. Nach Ind.vorauss. gilt
$$(n-1)-(m-1)+f=2,$$
woraus wieder direkt die Behauptung folgt.

Folgerungen

Die Eulerformel zieht einige wichtige Folgerungen nach sich:

1. Ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten hat höchstens $3n - 6$ Kanten.
2. Ein planarer bipartiter Graph mit $n \geq 4$ Knoten hat höchstens $2n - 4$ Kanten.
3. In jedem planaren Graph gibt es mindestens einen Knoten mit Grad kleiner oder gleich 5.
4. Der K_5 und der $K_{3,3}$ sind nicht planar.

Beweise

Der 1. Punkt ist einzusehen, wenn man bemerkt, dass jede Facette durch mindestens 3 Kanten umrandet wird, aber jede Kante an höchstens 2 Facetten anliegt. Also ist $3f \leq 2m$, und nach Eulerformel $6 = 3n - 3m + 3f \leq 3n - 3m + 2m = 3n - m$.

Bei bipartiten Graphen wird jede Facette von mindestens vier Kanten umrandet, also gilt $4f \leq 2m$ bzw. $2f \leq m$, und daher $4 = 2n - 2m + 2f \leq 2n - 2m + m = 2n - m$.

Für die dritte Behauptung bemerken wir, dass der durchschnittliche Grad der Knoten $\frac{2m}{n}$ ist, aber nach der 1. Folgerung gilt $\frac{2m}{n} \leq \frac{6n-12}{n} < 6$. Also muss es einen Knoten mit Grad kleiner als 6 geben.

K_5 kann nicht planar sein, da hier $n = 5$ und $m = 10$ gilt. Wäre der Graph planar, müsste gelten: $10 \leq 3 \cdot 5 - 6$ (Folgerung 1).
$K_{3,3}$ bipartit, $n = 6$ und $m = 9$. Es müsste $9 \leq 2 \cdot 6 - 4$ gelten.

Satz von Kuratowski

Eine Anmerkung zur Folgerung 3: Die Zahl 5 ist hier optimal gewählt. Wie man am Beispiel des *Ikosaeders* sehen kann – das ist ein Graph mit 12 Knoten, die alle den Grad 5 haben!

Wir beenden den Graphen-Abschnitt mit dem folgenden Satz:

Satz: Ein Graph ist genau dann planar, wenn er keine *Unterteilung* des K_5 oder des $K_{3,3}$ enthält.

(Eine Unterteilung ist anschaulich das, was aus einem gegebenen Graph wird, wenn man beliebig oft zusätzliche Knoten auf Kanten legt, wobei die betroffene Kante in zwei Kanten zerteilt wird.)

Dies ist der *Satz von Kuratowski.*
Sein Beweis ist recht aufwändig und wird hier weggelassen.