Wachstum des kgV

Zunächst definieren wir für natürliche Zahlen n:

$$kgV(n) = kgV(2, \ldots, n).$$

Dann gilt:

$$kgV(n) = \prod_{p \leq n,\ p\ prim} p^{\lfloor \log_p(n) \rfloor}$$

Satz: $kgV(n) > 2^{n-1}$

Für den Beweis brauchen wir ein Zwischenresultat:

Lemma: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n$ gilt:

$$m\binom{n}{m} \text{ teilt } kgV(n)$$

Beweis des Lemmas

Wir betrachten des Integral $I = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-m}dx$.

Es gilt $x^{m-1}(1-x)^{n-m} = \sum_k (-1)^k \binom{n-m}{k} x^{m-1+k}$.

Also $I = \sum_k (-1)^k \binom{n-m}{k} \int_0^1 x^{m-1+k}dx = \sum_k (-1)^k \binom{n-m}{k} \frac{1}{m+k}$

Daher ist $I \cdot kgV(n)$ eine Summe ganzer Zahlen, und folglich aus $\mathbb{Z}$, aber der Wert ist offensichtlich positiv, damit ist er aus $\mathbb{N}$.

Zeigen wir jetzt, dass $I = \frac{1}{m\binom{n}{m}}$ gilt, dann ist das Lemma bewiesen.

Wir führen eine Induktion über die Größe $n-m$ durch.

Induktionsanfang $m = n$:

$$\int_0^1 x^{m-1}dx = \frac{1}{m} = \frac{1}{m\binom{n}{m}}.$$

Induktionsschritt

Für den Induktionsschritt benutzen wir *partielle Integration*:

$$\int u'v = uv - \int v'u$$

Wir setzen $u = \frac{1}{m}x^m$ und $v = (1-x)^{n-m}$.

Dann folgt $u' = x^{m-1}$ und $v' = -(n-m)(1-x)^{n-m-1}$.

Aufgrund unserer Wahl gilt $I = \int u'v = uv - \int v'u$ und mit $u(1) \cdot v(1) = u(0) \cdot v(0) = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{n-m}{m} x^{(m+1)-1}(1-x)^{n-(m+1)}dx \\ &= \frac{n-m}{m} \int_0^1 x^{(m+1)-1}(1-x)^{n-(m+1)}dx \\ &= \frac{n-m}{m} \cdot \frac{1}{(m+1)\binom{n}{m+1}} = \frac{1}{m\binom{n}{m}} \end{aligned}$$

Nutze Induktions-voraussetzung

Damit ist das Lemma bewiesen.

kgV: Zum Beweis des Satzes

Wir wollen zeigen, dass für $n \geq 3$ gilt: $kgV(n) > 2^{n-1}$.

Klar ist: $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq \frac{2^n}{n}$, also folgt $\frac{n}{2} \cdot \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq 2^{n-1}$

Mit dem Lemma erhalten wir nun:

$$kgV(n) \geq \lceil \tfrac{n}{2} \rceil \cdot \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq \frac{n}{2} \cdot \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq 2^{n-1}$$

Tatsächlich gilt sogar:

$$2^n < kgV(n) \leq 4^{n-1}$$

Die erste Ungleichung ist etwas schwerer zu zeigen als unser Satz, und sie gilt tatsächlich auch erst ab $n = 7$.

Benutze hier $\frac{n}{2} \leq m \leq n \implies kgV(n)$ teilt $kgV(m) \cdot \binom{n}{m}$. Leicht zu sehen

Es folgt $kgV(2m) \leq kgV(m) \cdot \binom{2m}{m} \leq kgV(m) \cdot 4^m \leq 4^{2m-1}$

Der Fall für ungerade Zahlen geht ähnlich - bitte selbst versuchen...

Primzahldichte

Wir setzen $\pi(n)$ = Anzahl der Primzahlen p mit $1 < p \leq n$.

Es gilt $kgV(n) = \prod_{p \leq n,\ p\ prim} p^{\lfloor \log_p n \rfloor} \leq \prod_{p \leq n,\ p\ prim} n = n^{\pi(n)}$.

Und mit $kgV(n) > 2^n$ folgt hieraus für alle $n \geq 4$:

$$\pi(n) \geq \frac{n}{\log_2 n}$$

Andererseits wissen wir:

$$\prod_{p \leq n,\ p\ prim} p \leq kgV(n) \leq 4^{n-1}$$

und für alle $t \leq n$

$$t^{\pi(n)-\pi(t)} \leq \prod_{t < p \leq n,\ p\ prim} p \leq kgV(n) < 4^n$$

Primzahldichte, Fortsetzung

Wir hatten: $t^{\pi(n)-\pi(t)} \leq \prod_{t<p\leq n,\ p\ prim} p \leq kgV(n) < 4^n = 2^{2n}$

Es folgt: $(\pi(n) - \pi(t)) \cdot \log_2 t < 2n$

Also: $\pi(n) \cdot \log_2 t < 2n + \pi(t) \cdot \log_2 t \leq 2n + t \cdot \log_2 t$

Und damit: $\pi(n) < \frac{2n}{\log_2 t} + t$

Nun setzen wir $t = \frac{n}{(\log_2 n)^2}$ und erhalten

$$\pi(n) < \frac{2n}{\log_2 n - 2 \log_2 \log_2 n} + \frac{n}{(\log_2 n)^2}$$

Schließlich stellen wir fest, dass der letzte Ausdruck asymptotisch gegen die Summe $\frac{2n}{\log_2 n} + \frac{n}{(\log_2 n)^2}$ strebt, die nach oben durch $\frac{(2+\varepsilon)n}{\log_2 n}$ abgeschätzt werden kann.

Satz über die Primzahldichte

Wir fassen das gezeigte in einem Satz zusammen:

Satz: $\frac{n}{\log_2 n} \leq \pi(n) \leq \frac{(2+\varepsilon)n}{\log_2 n}$

Tatsächlich weiß man, dass $\pi(n)$ asymptotisch wächst wie

$$\frac{n}{\ln n} \quad = \quad \log_2 e \cdot \frac{n}{\log_2 n}$$

Dabei ist $\log_2 e$ ungefähr der Wert 1,4.

Bertrand'sches Postulat

Der folgende Satz wird als das *Bertrand'sche Postulat* bezeichnet:

Satz: Für alle $n \geq 1$ existiert eine Primzahl p, so dass

$$n < p \leq 2n$$

Für $n \leq 4048$ kann man das durch Anschauen der Liste aller Primzahlen bis zu diesem Wert leicht überprüfen.

Sei nun also $n > 4048$.

Wir schreiben $n = \prod_p p^{e_p(n)}$ und verwenden $n\binom{2n}{n} | kgV(2n)$.

Es folgt $e_p(\binom{2n}{n}) \leq e_p(kgV(2n)) \leq \log_p(2n)$, also $p^{e_p(\binom{2n}{n})} \leq 2n$.

Also gilt für jede Primzahl p mit $p > \sqrt{2n}$, dass $e_p(\binom{2n}{n}) \in \{0, 1\}$.

Bertrand'sches Postulat (Forts.)

Für jede Primzahl p mit $p > \sqrt{2n}$ gilt $e_p(\binom{2n}{n}) \in \{0, 1\}$.

Aber wenn $\frac{2}{3}n < p \leq n$, dann ist sogar nur die 0 möglich!

Es folgt: $\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq (\prod 2n) \cdot (\prod p) \cdot (\prod p)$.

Hierbei läuft das erste Produkt über alle $p \leq \sqrt{2n}$, das zweite über $\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n$ und das letzte über $n \leq p \leq 2n$.

Daher folgt $2^{2n} = 4^n \leq 2n \cdot (2n^{\sqrt{2n}-1}) \cdot 4^{\frac{2}{3}n} \cdot \prod_{n<p\leq 2n} p$.

Nun setzen wir $m = 2n$ und teilen durch 2^m. Das ergibt:

$$1 \leq m^{\sqrt{m}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}m} \cdot \prod_{n<p\leq 2n} p$$

bzw.

$$2^{\frac{1}{3}m - \sqrt{m}\log m} \leq \prod_{n<p\leq 2n} p$$

Bei genügend großem m ist die linke Seite größer 1

Aufgabe 2.1 (a)

Beweis der Bernoulli-Ungleichung:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \qquad \text{für } x \geq -1,\ n \geq 0$$

Wir beweisen das (natürlich) per vollständiger Induktion:

Induktionsanfang ($n = 0$):

$$(1 + x)^0 = 1 \qquad 1 + 0 \cdot x = 1 \qquad \text{passt!}$$

Induktionsschritt ($n \geq 1$):

$$(1 + x)^n = (1 + x)(1 + x^{n-1}) \geq (1 + x)(1 + (n - 1)x) =$$
$$= 1 + nx + (n - 1)x^2 \geq 1 + nx$$

Aufgabe 2.2

Gegeben seien zwei sortierte Sequenzen der Länge n,

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \qquad b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$$

sowie eine Permutation π auf den Zahlen $\{1, \ldots, n\}$. Damit sei

$$S(\pi) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\pi(i)}$$

Man soll zeigen, dass für $\pi = id$ der Wert $S(\pi)$ maximal wird, und für die Permutation $\pi = \rho$ mit $\rho(i) = n + 1 - i$ minimal.

Lösung:

Es seien π_1 und π_2 zwei Permutationen, die überall übereinstimmen, außer an den Stellen i und $i + 1$. Dort gelte:

$$\pi_1(i) = \pi_2(i + 1) \text{ und } \pi_1(i + 1) = \pi_2(i).$$

Aufgabe 2.2 (Forts.)

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} S(\pi_2) - S(\pi_1) &= \sum_{j=1}^{n} a_j b_{\pi_2(j)} - \sum_{j=1}^{n} a_j b_{\pi_1(j)} \\ &= a_i b_{\pi_2(i)} + a_{i+1} b_{\pi_2(i+1)} - a_i b_{\pi_1(i)} - a_{i+1} b_{\pi_1(i+1)} \\ &= a_i b_{\pi_1(i+1)} + a_{i+1} b_{\pi_1(i)} - a_i b_{\pi_1(i)} - a_{i+1} b_{\pi_1(i+1)} \\ &= (a_{i+1} - a_i)(b_{\pi_1(i)} - b_{\pi_1(i+1)}) \end{aligned}$$

Da $a_{i+1} - a_i \geq 0$ gilt, heißt das:

Falls $b_{\pi_1(i)} - b_{\pi_1(i+1)} > 0$, dann ist $S(\pi_2) - S(\pi_1) \geq 0$.

Damit ist klar: Wenn man, ausgehend von einer beliebigen Permutation π, durch sukzessives Vertauschen benachbarter Elemente des b-Feldes zu einer Sortierung kommt (also zu $\pi = id$), dann ist am Schluss $S(\pi)$ maximal. Minimalität von $S(\rho)$ folgt analog.

Zusammenfassung: Begriffe

Im Abschnitt 2.2 wurden folgende Begriffe eingeführt:

Fakultätsfunktion $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

$kgV(n) = kgV(2, \ldots, n)$

Primzahl-Zählfunktion $\pi(n) = |\{p \leq n \mid p \text{ ist Primzahl}\}|$.

Primzahlzertifikat

Bertrand-Postulat

Resultate (1)

Abschätzung der Fakultätsfunktion, gezeigt:

$$e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq n \cdot e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

und ohne Beweis: Stirling-Formel $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Integralmethode für Abschätzungen

Durchschnittswert (bzgl. k) der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ ist $\frac{2^n}{n}$.

Maximale Binomialkoeffizienten (für festes n) sind bei $k \sim \frac{n}{2}$.

Und deshalb gilt:

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \frac{2^n}{n}$$

Resultate (2)

Es gilt $kgV(n) > 2^{n-1}$ und $m \cdot \binom{n}{m}$ teilt $kgV(n)$.

Für alle $n \geq 7$ gilt: $2^n < kgV(n) \leq 4^{n-1}$.

Primzahldichte:

$$\frac{n}{\log_2 n} \leq \pi(n) \leq \frac{(2+\varepsilon)n}{\log_2 n}$$

(Die tatsächliche Primzahldichte ist rund $\frac{1.4 \cdot n}{\log_2 n}$.)

Bertrand'sches Postulat:

Für alle $n \geq 1$ existiert eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$.