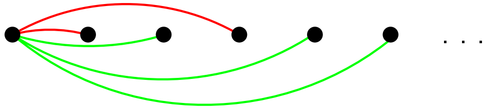
Ramsey für $n = 4$

Wir behaupten, dass jeder Graph mit 32 Knoten eine Clique oder eine unabhängige Menge der Größe 4 enthält. Die Zahl 32 ist hier bei weitem nicht optimal (18 wäre die tatsächliche Schranke).

Wir verwenden Graphen mit roten und grünen Kanten (anstelle der ursprünglichen Kanten und Nichtkanten), so können wir immer von einem vollständigen Graph ausgehen.

Wir reihen die 32 Knoten waagerecht auf und ziehen rote Kanten als Bögen oberhalb und grüne unterhalb der Reihe, allerdings zunächst nur für die Kanten, die vom ersten Knoten ausgehen:

Beispiel



Beweis zum Fall $n = 4$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

1) Mindestens 16 rote Kanten vom ersten Knoten nach rechts.
2) Mindestens 16 grüne Kanten vom ersten Knoten nach rechts.

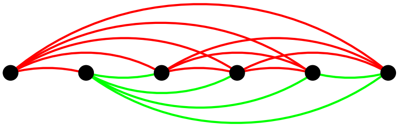
In jedem Fall erreichen wir durch Streichen von 15 Knoten, dass alle beim ersten Knoten beginnenden Kanten gleichfarbig sind.

Wir haben jetzt noch 17 Knoten, von denen wir den ersten ab jetzt unberührt lassen. Vom zweiten Knoten aus nach rechts machen wir das gleiche Spiel wieder. Von den 15 nach rechts gehenden Kanten sind mindestens 8 gleichfarbige. Wir streichen 7 Knoten mit dem Resultat, dass jetzt auch alle vom zweiten Knoten aus nach rechts gehenden Kanten gleichfarbig sind.

Aber Vorsicht: Die Kante vom zweiten Knoten nach links muss nicht dieselbe Farbe haben wie die Kanten nach rechts.

Beweis (Abschluss)

Wir haben jetzt noch 10 Knoten. Der erste hat nur Kanten einer Farbe. Der zweite hat nach rechts hin auch nur Kanten einer Farbe (die nicht dieselbe sein muss...) Der dritte Knoten hat noch sieben Kanten nach rechts hin, wovon mindestens vier dieselbe Farbe haben. Wir streichen 3 Knoten und behalten insgesamt sieben. Im nächsten Schritt streichen wir einen der drei am rechten Rand liegenden Knoten. Nun könnte die Situation wie folgt aussehen:



Generell haben immer drei der ersten fünf Knoten die gleiche Farbe bei den nach rechts gehenden Kanten (hier rot). Diese zusammen mit dem Knoten rechts ergeben die gesuchte einfarbige Clique.

Beweis des Satzes von Ramsey

Wir wiederholen noch einmal die Aussage des Satzes:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass jeder Graph mit N Knoten eine Clique der Größe n oder eine unabhängige Menge der Größe n enthält.

Zum Beweis wollen wir das Prinzip vom Fall $n = 4$ verallgemeinern.

Wir wissen allerdings noch nicht, welches N wir (in Abhängigkeit von n) wählen müssen, also sagen wir, es sind N Knoten, und heben uns die Bestimmung von N für später auf.

Aussieben

Wir reihen zunächst alle N Knoten nebeneinander auf, beginnend mit v_1, v_2 usw. bis zu v_N.

Nun beginnen wir immer mit dem ersten noch nicht vorher bearbeiteten (und auch nicht gestrichenen) Knoten – im ersten Schritt also v_1 – und streichen maximal die Hälfte der rechts davon liegenden Knoten, um alle nach rechts gehenden Kanten des betrachteten Knotens gleichfarbig zu bekommen.

Jeder überlebende Knoten bekommt die Farbe der von ihm aus nach rechts gehenden Kanten als seine „Rechtsfarbe“ zugeordnet.

Von den am Ende bleibenden Knoten haben mindestens die Hälfte die gleiche Rechtsfarbe. Die übrigen werden gestrichen und es verbleibt eine Clique mit einfarbigen Kanten.

Wieviele Knoten überleben?

Bei dem beschriebenen Vorgang wurde in jedem Durchgang ein Knoten endgültig *gerettet*, und die zu betrachtenden Restknoten waren noch mindestens halb so viele wie vorher.

Nach dem Aussieben sind also zunächst mindestens $\log_2 N$ viele Knoten übrig, von denen wir noch einmal maximal die Hälfte entfernen. Es bleiben also mindestens $\frac{1}{2} \log_2 N$ Knoten übrig, die unsere gesuchte einfarbige Clique bilden.

Wenn wir mit $N = 2^{2n}$ Knoten starten, haben wir also gezeigt, dass eine Clique (oder unabhängige Menge) der Größe n im ursprünglichen Graph enthalten war.

Die Zahl $N = 2^{2n}$ ist sehr unscharf, in Wahrheit genügen weit weniger Knoten, allerdings wächst N tatsächlich exponentiell in n.

Ramsey-Zahlen

Als n-te Ramsey-Zahl $R(n)$ bezeichnen wir die kleinste Zahl N, so dass jeder Graph mit mindestens N Knoten eine Clique oder eine unabhängige Menge der Größe n hat.

Wir haben gesehen, dass $R(3) = 6$ gilt.

Es ist auch bekannt, dass $R(4) = 18$ gilt.

$R(5)$ ist nach wie vor unbekannt. Man weiß nur:

$$43 \leq R(5) \leq 48$$

Welche Werte haben eigentlich $R(2)$ und $R(1)$?

Kleine Denksportaufgabe: Geben Sie einen Graph mit 10 Knoten an, der weder eine Clique noch eine unabhängige Menge der Größe 4 enthält.

Ramsey unsymmetrisch

Man kann auch fragen, wie groß ein Graph gewählt werden muss, damit garantiert werden kann, dass er entweder eine Clique der Größe m oder eine unabhängige Menge der Größe n enthält.

Die entsprechende Zahl nennt man $R(m, n)$.

Es gilt offensichtlich $R(m, n) = R(n, m)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

Können Sie das begründen?

Die Zahlen $R(1, n) = R(n, 1)$ sind trivial...

Wie groß sind $R(2, n) = R(n, 2)$?

Können wir auch noch etwas über $R(3, n) = R(n, 3)$ sagen?

Ramsey mit Hypergraphen und vielen Farben

Wie schon angedeutet, kann man eine analoge Aussage zum von uns gezeigten Ergebnis auch für Hypergraphen und für eine beliebige (endliche) Zahl von Farben beweisen:

Satz: Für alle $k, c, n \in \mathbb{N}$ existiert eine kleinste Zahl $R_{k,c}(n) \in \mathbb{N}$, so dass gilt: In jeder Menge V mit $|V| \geq R_{k,c}(n)$ gibt es bzgl. jeder Färbung $f : \binom{V}{k} \to C$ mit $|C| = c$ eine Teilmenge $X \subseteq V$ mit $|X| = n$ und f ist konstant auf $\binom{X}{k}$.